

Задание магистрантам-математикам 1-го курса

Школы естественных наук ДВФУ

Задание 1. Написать реферат по одной из тем курса.

Задание 2. Исследовать и численно решить начально-краевую задачу для уравнения переноса.

1. Рассматривается следующая начально-краевая задача для уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f, \text{ в } Q = (0, 1) \times (0, 1), \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u|_{x=0} = g(t). \quad (2)$$

Требуется найти приближенное решение задачи (1), (2) с помощью одной из схем, входящих в следующее семейство разностных схем:

$$\frac{v_{i-1+\sigma}^{n+1} - v_{i-1+\sigma}^n}{\tau_{n+1}} + a \frac{v_i^{n+\theta} - v_{i-1}^{n+\theta}}{h_i} = f_{i-1+\sigma}^{n+\theta}, \quad i = 1, \dots, N, \quad n = 0, \dots, M-1. \quad (3)$$

$$v_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad v_0^n = g(t_n), \quad n = 0, 1, \dots, M. \quad (4)$$

Здесь используются обычные обозначения (см. детали в книге [1, §6], сетка представлена на рис. 1, $\theta \in [0, 1]$ и $\tau \in [0, 1]$ – параметры схемы).

Мы рассматриваем следующие частные случаи:

1. $\theta = 0$, $\sigma = 0$. Схема (3) имеет вид

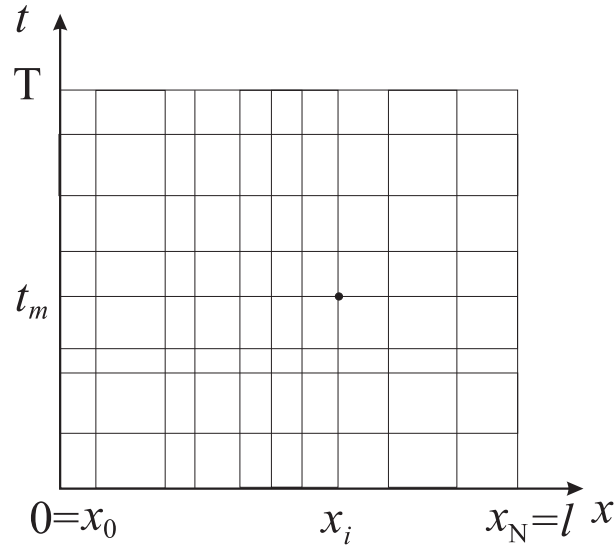
$$\frac{v_{i-1}^{n+1} - v_{i-1}^n}{\tau} + a \frac{v_i^n - v_{i-1}^n}{h} = f_{i-1}^n, \quad O(h + \tau), \quad (5)$$

2. $\theta = 0$, $\sigma = 1/2$. Схема (3) имеет вид

$$\frac{v_{i-1/2}^{n+1} - v_{i-1/2}^n}{\tau} + a \frac{v_i^n - v_{i-1}^n}{h} = f_{i-1/2}^n, \quad O(h^2 + \tau), \quad (6)$$

3. $\theta = 0$, $\sigma = 1$. Схема (3) имеет вид

$$\frac{v_i^{n+1} - v_{i-1}^n}{\tau} + a \frac{v_i^n - v_{i-1}^n}{h} = f_i^n, \quad O(h + \tau), \quad (7)$$



4. $\theta = 1/2, \sigma = 0$. Схема (3) имеет вид

$$\frac{v_{i-1}^{n+1} - v_{i-1}^n}{\tau} + a \frac{v_i^{n+1/2} - v_{i-1}^{n+1/2}}{h} = f_{i-1}^{n+1/2}, \quad O(h + \tau^2). \quad (8)$$

5. $\theta = 1/2, \sigma = 1/2$. Схема (3) имеет вид

$$\frac{v_{i-1/2}^{n+1} - v_{i-1/2}^n}{\tau} + a \frac{v_i^{n+1/2} - v_{i-1}^{n+1/2}}{h} = f_{i-1/2}^{n+1/2}, \quad O(h^2 + \tau^2). \quad (9)$$

6. $\theta = 1/2, \sigma = 1$. Схема (3) имеет вид

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} + a \frac{v_i^{n+1/2} - v_{i-1}^{n+1/2}}{h} = f_i^{n+1/2}, \quad O(h + \tau^2). \quad (10)$$

7. $\theta = 1, \sigma = 0$. Схема (3) имеет вид

$$\frac{v_{i-1}^{n+1} - v_{i-1}^n}{\tau} + a \frac{v_i^{n+1} - v_{i-1}^{n+1}}{h} = f_{i-1}^{n+1}, \quad O(h + \tau). \quad (11)$$

8. $\theta = 1, \sigma = 1/2$. Схема (3) имеет вид

$$\frac{v_{i-1/2}^{n+1} - v_{i-1/2}^n}{\tau} + a \frac{v_i^{n+1} - v_{i-1}^{n+1}}{h} = f_{i-1/2}^{n+1}, \quad O(h^2 + \tau). \quad (12)$$

9. $\theta = 1, \sigma = 1$. Схема (3) имеет вид

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} + a \frac{v_i^{n+1} - v_{i-1}^{n+1}}{h} = f_i^{n+1}, \quad O(h + \tau). \quad (13)$$

Применить одну из этих схем для нахождения приближенного решения задачи (1), (2) в случае, когда $f = 0, \varphi(x) = \sin 2\pi x, g(t) = -\sin 2\pi t$.

Шаг сетки h выбирать равным 0.1, 0.05 и 0.025. Результаты выдать в виде таблицы ошибок между точным и приближенным решениями. Номер схемы каждому магистру взять следующие: 4, 5, 6, 8.

Задание 3. Исследовать и численно решить начально-краевую задачу для уравнения диффузии.

1. Рассматривается следующая начально-краевая задача для уравнения диффузии:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \text{ в } Q = (0, 1) \times (0, 1), \quad (14)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u|_{x=0} = g_1(t), \quad u|_{x=l} = g_2(t). \quad (15)$$

Требуется найти приближенное решение задачи (1), (2) с помощью одной из схем, входящей в следующее семейство разностных схем:

$$\left(A_\alpha \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau_{n+1}} \right)_i - a^2 \frac{v_{i-1}^{n+\theta} - 2v_i^{n+\theta} + v_{i+1}^{n+\theta}}{h^2} = (A_\alpha f^{n+\theta})_i, \quad (16)$$

$$i = 1, 2, \dots, N - 1; \quad n = 0, 1, \dots, M - 1.$$

$$v_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad v_0^n = g_1(t_n), \quad v_N^n = g_2(t_n), \quad n = 0, 1, \dots, M. \quad (17)$$

Простой анализ показывает (см. [1]), что разностная схема (16), (17) имеет глобальный порядок аппроксимации

$$O(h^{r(\alpha)} + \tau^{s(\theta)}) \quad \text{на решении} \quad u \in C^{r+2, s+1}(\bar{Q}), \quad (18)$$

где

$$s(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta \neq 1/2, \\ 2, & \theta = 1/2, \end{cases} \quad r(\alpha) = \begin{cases} 2, & \alpha \neq 1/12, \\ 4, & \alpha = 1/12, \end{cases} \quad (19)$$

и устойчива, если выполняется условие

$$\theta \geq \frac{1}{2} + \frac{(4\alpha - 1)h^2}{4a^2\tau_n}. \quad (20)$$

Приведем краткую классификацию и основные свойства наиболее известных разностных схем для уравнения (14). При этом, как и в §6, под

порядком аппроксимации приводимых ниже схем будем понимать локальный порядок аппроксимации соответствующего разностного уравнения, определяемый из (1.18), который будем записывать в одной строке с разностным уравнением (справа от него).

1. Простейшая явная схема ($\alpha = \theta = 0$) имеет вид

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} - a^2 \frac{v_{i-1}^n - 2v_i^n + v_{i+1}^n}{h^2} = f_i^n, \quad O(h^2 + \tau), \quad (21)$$

или

$$v_i^{n+1} = rv_{i-1}^n + (1 - 2r)v_i^n + rv_{i+1}^n + \tau f_i^n. \quad (22)$$

В силу (20) схема условно устойчива, т.е. устойчива при

$$0 \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4a^2\tau} \implies \tau \leq \frac{1}{2} \frac{h^2}{a^2}. \quad (23)$$

2. Явная схема повышенной точности ($\theta = 1/2, \alpha = 1/12, r = 1/6$)

имеет вид

$$v_i^{n+1} = \frac{1}{6}(v_{i-1}^n + 4v_i^n + v_{i+1}^n) + \frac{\tau}{12}(f_{i-1}^{n+1/2} + 10f_i^{n+1/2} + f_{i+1}^{n+1/2}), \quad O(h^4 + \tau^2) \quad (24)$$

и устойчива, поскольку выполняется условие (20). Однако в силу условия $r = 1/6$ шаг τ жестко связан с h формулой $\tau = h^2/6a^2$.

3. Простейшая неявная схема ($\alpha = 0, \theta = 1$) имеет вид

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} - a^2 \frac{v_{i-1}^{n+1} - 2v_i^{n+1} + v_{i+1}^{n+1}}{h^2} = f_i^{n+1}, \quad O(h^2 + \tau), \quad (25)$$

или

$$-rv_{i-1}^{n+1} + (1 + 2r)v_i^{n+1} - rv_{i+1}^{n+1} = v_i^n + \tau f_i^{n+1} \quad (26)$$

и абсолютно устойчива, так как выполняется условие (20).

4. Схема Кранка-Николсона ($\alpha = 0, \theta = 1/2$) имеет вид

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} - a^2 \frac{v_{i-1}^{n+1/2} - 2v_i^{n+1/2} + v_{i+1}^{n+1/2}}{h^2} = f_i^{n+1/2}, \quad O(h^2 + \tau^2), \quad (27)$$

или

$$-rv_{i-1}^{n+1} + 2(1+r)v_i^{n+1} - rv_{i+1}^{n+1} = rv_{i-1}^n + 2(1-r)v_i^n + rv_{i+1}^n + 2\tau f_i^{n+1/2} \quad (28)$$

и абсолютно устойчива, поскольку выполняется условие (20).

5. Схема “с весами” ($\alpha = 0, \theta \geq 0$) имеет вид (16) при $\alpha = 0$ или

$$\begin{aligned} & \theta r v_{i-1}^{n+1} + (1 + 2r\theta)v_i^{n+1} - \theta r v_{i+1}^{n+1} = \\ & = r(1 - \theta)v_{i-1}^n + [1 - 2r(1 - \theta)]v_i^n + r(1 - \theta)v_{i+1}^n + \tau f_i^{n+\theta}, \quad O(h^2 + \tau^s(\theta)) \end{aligned} \quad (29)$$

и устойчива согласно (20) при выполнении условия

$$\theta \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4a^2\tau} \implies \tau \leq \frac{h^2}{2a^2(1 - 2\theta)}. \quad (30)$$

При $\theta \geq 1/2$ указанная схема абсолютно устойчива. Отметим, что схемы (21), (25) и (27) являются частными случаями схемы (29), отвечающими соответственно значениям $\theta = 0$, $\theta = 1$ и $\theta = 1/2$. Схему (16), в свою очередь, можно считать обобщением схемы (29).

6. Схема максимальной точности ($\alpha = 1/12, \theta = 1/2$) имеет вид

$$\begin{aligned} & (1 - 6r)v_{i-1}^{n+1} + (10 + 12r)v_i^{n+1} + (1 - 6r)v_{i+1}^{n+1} = \tau(f_{i-1}^{n+1/2} + 10f_i^{n+1/2} + f_{i+1}^{n+1/2}) + \\ & + (1 + 6r)v_{i-1}^n + (10 - 12r)v_i^n + (1 + 6r)v_{i+1}^n, \quad O(h^4 + \tau^2) \end{aligned} \quad (31)$$

и абсолютно устойчива, поскольку выполняется (20). Схему (31) можно считать наилучшей (в некотором смысле “оптимальной”) на гладких решениях разностной схемой, аппроксимирующей уравнение (14) на шестичточечном шаблоне $\omega_{i-1, i+1}^{n, n+1}$. О других разностных схемах для уравнения (14) можно прочитать, например, в [2].

Применить одну из этих схем для нахождения приближенного решения задачи (14), (15) в случае, когда:

а) $f = 2(x^2 - x)(2t - 1) - 4(t^2 - t)$, $x \in [0, 1]$, $t \in (0, 1]$.

Точное решение: $u(x, t) = 2(t^2 - t)(x^2 - x)$.

б) $f = 4\pi^2 \sin 2\pi(x - t) - 2\pi \cos 2\pi(x - t)$, $\varphi(x) = \sin 2\pi x$, $g_1(0, t) = -\sin 2\pi t$, $g_2(1, t) = \sin 2\pi(1 - t)$, . . .

Шаг сетки h выбирать равным 0.1, 0.05 и 0.025. Результаты выдать в виде таблицы ошибок между точным и приближенным решениями.

Задание 4. Рассматривается следующая начально-краевая задача для двумерного уравнения диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f \text{ в } \Omega \times (0, T), \quad \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \quad (32)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad u|_{\partial\Omega} = g(x, y, t). \quad (33)$$

Требуется построить семейство разностных схем для задачи (32), (33), зависящее от двух параметров α и θ , аналогичное семейству (16). Исследовать порядок аппроксимации построенных разностных схем, исследовать их устойчивость и найти приближенное решение с помощью схем второго и четвертого порядка точности по пространственным переменным.

Применить одну из этих схем для нахождения приближенного решения задачи (32), (33) в случае, когда:

а) $f = 2(x^2 - x)(y^2 - y)(2t - 1) - 4(t^2 - t)(x^2 - x + y^2 - y)$, $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$, $t \in (0, 1]$.

Точное решение: $u(x, t) = 2(t^2 - t)(x^2 - x)(y^2 - y)$.

б) $f = \pi \sin \pi x \sin \pi y (\cos \pi t + 2\pi \sin \pi t)$, $\varphi(x, y) = 0$, $g(x, y, t) = 0$.

Шаг сетки h выбирать равным 0.1, 0.05 и 0.025. Результаты выдать в виде таблицы ошибок между точным и приближенным решениями.

Список литературы

1. Алексеев Г.В. Численные методы решения задач математической физики. 2010.
2. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. Москва Энергоатомиздат, 1984.

Профессор-консультант Г.В. Алексеев.