

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ ПО РЫБОЛОВСТВУ

Дальневосточный государственный технический
рыбохозяйственный университет

Г.В. Алексеев

ВВЕДЕНИЕ В ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ

Владивосток 2002

УДК

ББК

Утверждено редакционно-издательским советом Дальневосточного государственного технического рыбохозяйственного университета

Автор - Алексеев Г.В., заведующий кафедрой информатики и компьютерных технологий Дальневосточного государственного технического рыбохозяйственного университета

Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений.

Уч. пос. Владивосток: Дальрыбтуз (ТУ), 2002, – 104с.

Излагаются основные понятия метода конечных разностей дискретизации дифференциальных уравнений математической физики. Приводятся примеры его применения при дискретизации начальных краевых задач как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и следующих уравнений в частных производных: уравнения переноса, одномерного уравнения теплопроводности, одномерного волнового уравнения и двумерного уравнения Пуассона. Особое внимание уделяется построению экономичных разностных схем повышенной и максимальной точности на заданном шаблоне разностной сетки. Пособие предназначено для студентов математических и естественных специальностей.

Рецензенты:

Кафедра математического моделирования и информатики Дальневосточного государственного технического университета, зав.кафедрой: доктор физ.-мат. наук профессор *Буренин А.А.*

Кандидат физ.-мат. наук, доцент *Колобов А.Г.* – доцент Дальневосточного государственного университета

Печатается в авторской редакции

© Г.В. Алексеев, 2002,

© Дальневосточный государственный
технический рыбохозяйственный
университета, 2002,

Предисловие

Данное пособие написано по материалам курса лекций по численным методам, который автор неоднократно читал студентам специальностей прикладная математика Дальневосточного госуниверситета, а также прикладная математика и биоэкология Дальневосточного государственного технического рыбохозяйственного университета. Оно посвящено изложению и применению метода конечных разностей (метода сеток) для дискретизации и численного решения дифференциальных уравнений, возникающих при математическом моделировании естественных процессов.

Пособие состоит из 4-х глав. В §§1-3 излагаются основные понятия метода сеток и доказывается теорема о том, что из аппроксимации и устойчивости разностной схемы вытекает ее сходимости. В §§4-7, посвященных построению и исследованию разностных схем для дифференциальных уравнений I порядка, сначала излагается сущность интегро-интерполяционного метода построения разностных схем и доказывается теорема о связи порядка аппроксимации полученных таким методом схем с порядком точности используемых квадратурных формул. Далее на основе указанной теоремы строятся два двухпараметрических семейства двухточечных и трехточечных (по пространственной переменной) разностных схем, объединяющие наиболее употребительные схемы для уравнения переноса, и с единых позиций исследуются их основные свойства (аппроксимация, устойчивость, консервативность, монотонность и диссипативность). Это позволяет провести классификацию указанных схем по их свойствам в зависимости от значений параметров и выбрать среди них наилучшие экономичные схемы максимальной точности.

Аналогичная идея используется в §9 при рассмотрении краевой задачи для уравнения теплопроводности: выводится двухпараметрическое семейство разностных схем, исследуются свойства этих схем и выделяется наилучшая среди них экономичная схема максимальной точности. Далее, в §§10–11 приводятся употребительные разностные схемы для одномерного волнового уравнения и уравнения Пуассона и исследуются их свойства. В §12 излагаются методы прогонки и разделения переменных решения сеточных уравнений.

Содержание

Глава 1. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений	7
1. Постановка задачи Коши	7
2. Методы Эйлера и Рунге–Кутта	8
2.1. Сущность метода сеток дискретизации обыкновенных дифференциальных уравнений.	8
2.2. Сущность интегро-интерполяционного метода. Метод Эйлера.	9
2.3. Метод Эйлера с пересчетом или метод Рунге–Кутта второго порядка точности.	13
Глава 2. Введение в метод конечных разностей	17
1. Основные понятия метода сеток	17
1.1. Сетки и сеточные функции.	17
1.2. Разностная аппроксимация дифференциальных операторов.	20
1.3. Постановка разностной задачи. Разностная схема.	24
2. Основная теорема теории разностных схем	25
2.1. Постановка дифференциальной и разностной задач.	25
2.2. Сходимость, аппроксимация и устойчивость разностных схем. Основная теорема.	26
3. Некоторые сведения о математическом аппарате теории разностных схем	32
3.1. Формулы разностного дифференцирования произведения и суммирования по частям.	33
3.2. Разностные формулы Грина.	34
3.3. Сеточная задача на собственные значения.	35
3.4. Сеточное преобразование Фурье.	37
Глава 3. Разностные схемы для уравнений 1-го порядка	38
4. Обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка	38
4.1. Суть интегро-интерполяционного метода. Двухточечные разностные схемы.	38
4.2. Трехточечные разностные схемы.	40

5. Разностные схемы для законов сохранения	43
6. Двухслойные двухточечные разностные схемы для уравнения переноса	45
6.1. Постановка задачи. Свойства точного решения.	45
6.2. Построение разностных схем.	51
6.3. Реализация разностной схемы.	53
6.4. Исследование устойчивости на основе принципа максимума.	54
6.5. Исследование устойчивости энергетическим методом.	57
6.6. Исследование устойчивости методом гармоник. Классификация двухточечных разностных схем.	60
7. Двухслойные трехточечные разностные схемы для уравнения переноса	66
7.1. Построение разностных схем.	66
7.2. Реализация разностных схем.	68
7.3. Исследование устойчивости разностной схемы для периодической краевой задачи энергетическим методом.	69
Глава 4. Разностные схемы для уравнений 2-го порядка	73
8. Обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка	73
8.1. Простейшая краевая задача.	73
8.2. Третья краевая задача.	75
8.3. Исследование устойчивости первой краевой задачи методом энергетических неравенств.	77
9. Двухслойные трехточечные разностные схемы для уравнения теплопроводности	79
9.1. Постановка задачи. Свойства точного решения.	79
9.2. Построение разностной схемы.	80
9.3. Исследование устойчивости методом гармоник.	81
9.4. Классификация двухслойных трехточечных разностных схем для уравнения теплопроводности.	87
10. Трехслойная разностная схема для одномерного волнового уравнения	89
10.1. Постановка задачи. Построение разностной схемы.	89
10.2. Исследование устойчивости.	91

11. Уравнение Пуассона	93
11.1. Употребительные разностные схемы.	94
11.2. Аппроксимация краевой задачи.	96
11.3. Исследование устойчивости решения задачи Дирихле методом априорных оценок.	98
12. Некоторые методы решения сеточных уравнений	99
12.1. Метод прогонки.	99
12.2. Метод разделения переменных.	101
Литература	104

Глава 1. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

§1. Постановка задачи Коши

В этой главе мы займемся изучением численных методов дискретизации и численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) вида:

$$y' = f(x, y), \quad (1.1)$$

$$y'' = f(x, y, y'), \dots, \quad (1.2)$$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1.3)$$

где f – заданная функция своих аргументов. Указанные уравнения обычно возникают при математическом моделировании различного рода естественных процессов.

Решением ОДУ называется всякая *дифференцируемая (нужное число раз) функция* $y = y(x)$, которая, будучи подставлена в это уравнение, обращает его в тождество по x . График решения ОДУ называется *интегральной кривой*. Известно, что ОДУ n -го порядка имеет бесчисленное множество решений, образующих так называемое *общее решение*, зависящее от n произвольных постоянных. Чтобы получить частное решение ОДУ, необходимо к рассматриваемому ОДУ присоединить некоторые дополнительные условия. Обычно рассматриваются два типа задач, связанных с определением частных решений: *задача Коши*, или *начальная задача* и *краевая (граничная) задача*. Задача Коши для ОДУ (1.3) заключается в нахождении решения y , удовлетворяющего при некотором фиксированном значении $x = x_0$ условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (1.4)$$

Геометрически задача Коши соответствует нахождению интегральной кривой уравнения (1.3), проходящей через заданную точку (x_0, y_0) (см. рис. 1.) (под заданным углом). При этом, если $n > 1$, то второе условие в (1.4) задает угол наклона искомой кривой в точке x_0 , третье условие – кривизну и т.д. Характерным для задачи Коши является то, что дополнительные условия задаются в одной точке x_0 . Такие условия используются обычно при изучении механических, электрических, радиотехнических, биологических и других нестационарных процессов.

Краевые задачи характеризуются тем, что дополнительные условия задаются не в одной, а в нескольких точках. Например, в случае ОДУ 2-го порядка (1.2) можно

поставить следующую краевую задачу: найти решение y ОДУ (1.2), рассматриваемого на интервале (a, b) , которое удовлетворяет условиям $y(a) = A$, $y(b) = B$, где A и B – заданные числа. Такие задачи характерны для стационарных процессов, например, при изучении установившегося распределения температуры в одномерном теле, при исследовании деформированного состояния упругого стержня и т.д.

Обратимся к уравнению (1.1). В случае, когда f линейно зависит от y , т.е. $f = p(x)y + q(x)$, решение начальной задачи, как легко проверить, выражается формулой

$$y(x) = e^{\int_0^x p(x) dx} \left[y_0 + \int_{x_0}^x q(x) e^{-\int_0^x p(x) dx} dx \right].$$

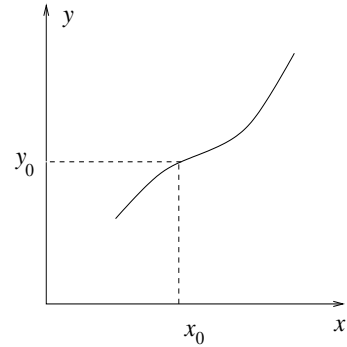


Рис. 1:

В общем же нелинейном случае точное аналитическое решение задачи Коши (1.1), (1.2) получить, как правило, не удастся. Точно также, точное аналитическое решение задачи Коши (1.3), (1.4) для ОДУ n -го порядка (1.3) удастся найти в очень редких случаях, например, в случае, когда величины $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ входят в правую часть (1.3) линейно с постоянными коэффициентами.

Ввиду указанных фактов на практике для нахождения решений поставленных задач используют приближенные методы. Основные приближенные методы решения ОДУ можно разбить на следующие два класса: а) приближенные аналитические методы (например, метод степенных рядов); б) численные методы. В первом случае решение получается в виде приближенной формулы, так что аналитические методы можно применять для нахождения как частных, так и общих решений ОДУ. Во втором случае приближенное решение получается в виде таблицы чисел, так что численные методы применимы только для отыскания частных решений ОДУ.

§2. Методы Эйлера и Рунге–Кутта

2.1. Сущность метода сеток дискретизации обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad x \in [x_0, X], \quad (2.1)$$

$$y|_{x=x_0} = y_0. \quad (2.2)$$

Мы будем предполагать, что решение задачи (2.1), (2.2) существует, единственно и обладает гладкостью, необходимой для справедливости проводимых в дальнейшем

выкладок. Как указывалось раньше, точное решение задачи (1.1), (1.2) в виде некоторой аналитической формулы, как правило, найти не удастся. Поэтому мы будем отыскивать приближенное решение $\tilde{y}(x)$ задачи (2.1), (2.2), используя какой-либо численный метод и ЭВМ. Рассматривая решение y задачи (2.1), (2.2) как множество пар чисел $\{(x, y(x)) : x \in [x_0, X]\}$, замечаем, что из-за бесконечности множества этих чисел любая ЭВМ не в состоянии обработать всю информацию, относящуюся к y , поскольку любая ЭВМ может оперировать только с конечным набором чисел. Следовательно, исходную задачу необходимо свести к другой задаче, которая содержит в качестве неизвестных только конечное множество чисел. Эта новая задача, решение которой будет являться, вообще говоря, только приближением к решению исходной задачи, называется *дискретной задачей*, а сам процесс сведения исходной *непрерывной задачи* к дискретной носит название *дискретизации*. Тем самым задача сводится к определению таблицы

$$\text{к определению таблицы } \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x_i & x_0 & x_1 & \dots & x_n & \dots & x_N \\ \hline u_i & u_0 & u_1 & \dots & u_n & \dots & u_N \end{array}$$

Исходным пунктом применяемых в этой главе методов дискретизации будет являться замена области непрерывного изменения аргумента $[x_0, X]$ дискретным множеством точек, например, множеством $x_n = x_0 + nh$, $n = 0, 1, \dots, N$, где $h = (X - x_0)/N$. Вместо функции y будем отыскивать таблицу (x_n, u_n) , $n = 0, 1, \dots, N$, где

$$u_n = \tilde{y}(x_n), \quad y_n = y(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (2.3)$$

Используя далее ту или иную схему метода дискретизации, мы будем переходить от дифференциального уравнения (2.1) связывающего значения неизвестного решения $y(x)$, к дискретной задаче, связывающей значения u_n .

2.2. Сущность интегро-интерполяционного метода. Метод Эйлера. Рассмотрим сначала вместо (1.1) простейшее уравнение 1-го порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \quad (2.4)$$

Интегрируя (2.4) на интервале $[x_0, x_1] = [x_0, x_0 + h]$, имеем $y(x_1) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$. Отсюда с учетом обозначений (2.3) получаем

$$y_1 \equiv y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx. \quad (2.5)$$

Допустим, что нам удалось бы точно вычислить интеграл в (2.5). Тогда, поскольку значение y_0 является известным из начального условия, то формула (2.5) позволила бы найти в этом случае точное значение y_1 решения в точке x_1 . Но, как правило, точно вычислить интеграл в (2.5) не удастся, поэтому приходится вычислять его

приближенно с помощью той или иной квадратурной формулы. Применяя, например, простейшую формулу левых прямоугольников

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = f(x_0)h + O(h^2) = f_0h + O(h^2), \quad (2.6)$$

где $f_n = f(x_n)$, $n = 0, 1, \dots, N$, будем иметь из (2.5)

$$y_1 = y_0 + f_0h + O(h^2). \quad (2.7)$$

Отсюда, отбрасывая слагаемое $O(h^2)$, находим приближенное значение u_1 по формуле

$$u_1 = u_0 + f_0h \quad (u_0 = y_0). \quad (2.8)$$

Из (2.7) и (2.8) следует, что ошибка $u_1 - y_1$ между точным и приближенным значениями решения имеет порядок $O(h^2)$, т.е. стремится к 0 как h^2 при $h \rightarrow 0$. В таком случае принято говорить, что *локальная погрешность приближенного решения* на 1-ом шаге имеет порядок $O(h^2)$.

Поскольку порядок $O(h^2)$ не слишком высок, то хотелось бы найти значение u_1 с более высокой точностью. Для этого вместо (2.6) следует воспользоваться квадратурной формулой более высокого порядка точности. Применяя, например, формулу трапеций

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + O(h^3), \quad (2.9)$$

имеем

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + O(h^3). \quad (2.10)$$

Отсюда приходим к формуле

$$u_1 = u_0 + \frac{h}{2}(f_0 + f_1). \quad (2.11)$$

Ясно, что значение u_1 , определяемое формулой (2.11), имеет точность $O(h^3)$.

Аналогично, применяя формулу Симпсона

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{6}(f_0 + 4f_{1/2} + f_1) + O(h^5), \quad (2.12)$$

где $f_{1/2} = f(x_0 + h/2)$, имеем

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(f_0 + 4f_{1/2} + f_1) + O(h^5), \quad (2.13)$$

$$u_1 = u_0 + \frac{h}{6}(f_0 + 4f_{1/2} + f_1). \quad (2.14)$$

Формула (2.14) позволяет найти значение u_1 уже с точностью $O(h^5)$ и т.д.

Итак, применяя ту или иную квадратурную формулу для вычисления интеграла в (2.5) и используя начальное условие (2.2), мы можем найти приближенное значение u_1 решения задачи (2.4), (1.2) в точке x_1 , причем точность этого значения определяется точностью применяемой квадратурной формулы. Используя далее u_1 в качестве начального условия, мы можем аналогичным образом определить значение u_2 , затем вычислить u_3 и т.д., пока не будет вычислено значение u_N . Тем самым, задача нахождения приближенного решения задачи (2.1), (2.4) будет решена (если, конечно, приближенное решение будет найдено с заданной точностью). Вернемся теперь к исходному нелинейному уравнению (1.1) и применим для нахождения приближенного решения задачи (2.1), (2.2) аналогичную процедуру. Интегрируя (2.1) на интервале $[x_0, x_1]$, имеем

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y) dx. \quad (2.15)$$

Мы предполагаем, что решение $y(x)$ задачи (2.1), (2.2) существует, единственно и является достаточно гладким. На точном решении $y(x)$ формула (2.15) принимает вид

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f[x, y(x)] dx. \quad (2.16)$$

Поскольку в интеграле в (2.16) подинтегральная функция зависит только от x , то для приближенного вычисления данного интеграла можно воспользоваться какой-либо квадратной формулой. Применяя, например, формулу левых прямоугольников

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f[x, y(x)] dx = hf(x_0, y_0) + O(h^2), \quad (2.17)$$

имеем

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) + O(h^2). \quad (2.18)$$

Отсюда, отбрасывая слагаемое $O(h^2)$, находим приближенное значение u_1 :

$$u_1 = u_0 + hf(x_0, u_0). \quad (2.19)$$

В полной аналогии с предыдущими результатами из (2.18), (2.19) следует, что ошибка $u_1 - y_1$ имеет порядок $O(h^2)$. Используя далее u_1 в качестве начального условия, мы можем аналогичным образом по формуле $u_2 = u_1 + hf(x_1, u_1)$ определить значение u_2 и т.д. В результате приходим к общей формуле

$$u_{n+1} = u_n + hf(x_n, u_n), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (2.20)$$

позволяющей по заданному значению $u_0 = y_0$ найти последовательно приближенные значения u_1, u_2, \dots, u_N решения задачи (2.1), (2.2).

Метод численного решения задачи Коши (2.1), (2.2) при помощи формулы (2.20) называется *методом Эйлера*. Его также называют *методом ломаных*, т.к. геометрически формула (2.20) отвечает замене на каждом частичном интервале $[x_n, x_{n-1}]$ интегральной кривой, проходящей через точку (x_n, y_n) , отрезком касательной к интегральной кривой в точке (x_n, u_n) (рис. 2.).

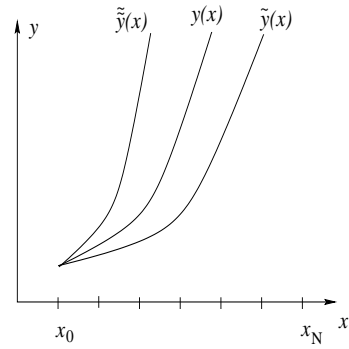


Рис. 2:

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В случае задачи Коши для системы M уравнений 1-го порядка

$$y'_i = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad y'_i(x_0) = y_{i0}, \quad i = 1, \dots, M$$

аналогом (2.20) являются соотношения

$$u_{i,n+1} = u_{i,n} + hf_i(x_n, u_{1,n}, u_{2,n}, \dots, u_{M,n}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.21)$$

Здесь $(u_{1,k}, u_{2,k}, \dots, u_{M,k})$ - вектор приближенного решения в точке x_k .

Мы уже указывали, что локальная погрешность метода Эйлера на 1-ом шаге имеет порядок $O(h^2)$. Ясно, что такой же порядок будет иметь погрешность и на втором шаге, т.е. $u_2 - y_2 = O(h^2)$. Однако мы не можем утверждать, что такой же порядок будет у погрешности на последнем N -ом шаге, поскольку с ростом n происходит накопление погрешности. Так как $N = (X - x_0)/h = O(1/h)$, то здравый смысл подсказывает, что через N шагов погрешность будет иметь меньший порядок, скажем $O(h)$. Чтобы убедиться в этом, проведем соответствующие выкладки, которые одновременно позволят исследовать численную устойчивость метода Эйлера относительно возмущений начальных данных.

Будем предполагать, что функция f удовлетворяет условию Липшица по y , т.е. что существует такая постоянная L , что

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall x \in [x_0, X] \quad \text{и} \quad \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.22)$$

Напомним, что это условие обеспечивает единственность решения дифференциальной задачи (2.1), (2.2). Пусть в процессе счета вкралась ошибка, скажем за счет округления в ЭВМ введено вместо точного значения y_0 приближенное значение $u_0 = \tilde{y}_0$. Тогда из (2.18), (2.19) имеем следующее выражение для погрешности на 1-ом шаге

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) + O(h^2), \quad u_1 = u_0 + hf(x_0, u_0),$$

$$u_1 - y_1 = u_0 - y_0 + h[f(x_0, u_0) - f(x_0, y_0)] + O(h^2).$$

Отсюда выводим, что

$$|u_1 - y_1| \leq |u_0 - y_0| + hL|u_0 - y_0| + O(h^2) = (1 + hL)|u_0 - y_0| + O(h^2).$$

Далее для погрешности на 2-ом шаге имеем

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) + O(h^2), \quad u_2 = u_1 + hf(x_1, u_1),$$

$$u_2 - y_2 = u_1 - y_1 + h[f(x_1, u_1) - f(x_1, y_1)] + O(h^2),$$

$$|u_2 - y_2| \leq (1 + hL)|u_1 - y_1| + O(h^2) \leq (1 + hL)^2|u_0 - y_0| + (1 + hL)^2O(h^2) + O(h^2).$$

Аналогично

$$|u_3 - y_3| \leq (1 + hL)^3|u_0 - y_0| + [(1 + hL)^2 + (1 + hL) + 1]O(h^2), \dots,$$

$$|u_N - y_N| \leq (1 + hL)^N|u_0 - y_0| + [(1 + hL)^{N-1} + \dots + (1 + hL) + 1]O(h^2).$$

Суммируя геометрическую прогрессию со знаменателем $1 + hL$, имеем

$$|u_N - y_N| \leq (1 + hL)^N|u_0 - y_0| + \frac{(1 + hL)^N - 1}{(1 + hL) - 1}O(h^2). \quad (2.23)$$

Но

$$1 + hL < e^{hL} = 1 + hL + \frac{1}{2}(h^2L^2) + \dots \implies (1 + hL)^N < e^{hLN} = e^{L(x-x_0)}.$$

Поэтому из (2.23) выводим, что

$$|u_N - y_N| \leq e^{L(x-x_0)}|u_0 - y_0| + O(h). \quad (2.24)$$

Правая часть (2.24) содержит два слагаемых. Первое слагаемое вызывается возникновением ошибки за счет округления начального значения y_0 , второе слагаемое имеет смысл глобальной погрешности метода Эйлера. Поскольку (2.24) справедливо и подавно, если вместо N подставить n , то из (2.24) приходим к выводу, что:

- 1) метод Эйлера имеет глобальную погрешность порядка $O(h)$,
- 2) метод Эйлера устойчив относительно возмущений исходных данных.

2.3. Метод Эйлера с пересчетом или метод Рунге–Кутта второго порядка точности. Метод Эйлера является самым простым и самым грубым численным методом решения задачи (2.1), (2.2) и применяется, как правило, в тех случаях, когда не требуется особой точности у приближенного решения. Недостаток этого метода легко заметить в случае, когда точное решение является выпуклой вверх или вниз функцией. Действительно, в случае, изображенном на рис. 2., ломаная, которую мы

выстраиваем по методу Эйлера, с увеличением n все больше и больше отклоняется вниз от истинного решения. Это объясняется тем, что для нахождения каждого следующего значения приближенного решения используется тангенс угла наклона касательной в предыдущей точке. Аналогичная картина, но с отклонением вверх от точного решения, будет наблюдаться в случае, когда для нахождения u_{n+1} будет использоваться тангенс угла наклона касательной в точке x_{n+1} :

$$u_{n+1} = u_n + hf(x_{n+1}, u_{n+1}). \quad (2.25)$$

Соответствующая кривая изображена на рис. 2 в виде кривой $\tilde{y}(x)$. Интуитивно ясно, что для получения более точного значения приближенного решения в точке x_{n+1} в формуле (2.20) либо (2.25) вместо $f(x_n, u_n)(f(x_{n+1}, u_{n+1}))$ нужно взять среднее арифметическое $[f(x_n, u_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})]/2$. В результате приходим к формуле

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[f(x_n, u_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})]. \quad (2.26)$$

Важно отметить, что формулу (2.25) можно получить и аналитическим (с помощью интегро – интерполяционного метода) путем, который одновременно позволит определить и порядок точности. С этой целью вернемся к формуле (2.16). Напомним, что для получения формулы (2.20) метода Эйлера, имеющего локальную точность $O(h^2)$, мы применили при вычислении интеграла в правой части (2.16) формулу левых прямоугольников, имеющую локальную точность $O(h^2)$. Применим теперь для вычисления этого интеграла формулу трапеций, имеющую локальный порядок точности $O(h^3)$:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} [f(x, y(x))]dx = \frac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)] + O(h^3). \quad (2.27)$$

Тогда из (2.16) имеем

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)] + O(h^3) \quad (2.28)$$

откуда после отбрасывания слагаемого $O(h^2)$ приходим к формуле

$$u_1 = u_0 + \frac{h}{2}[f(x_0, u_0) + f(x_1, u_1)]. \quad (2.29)$$

Интуитивно ясно, что формула (2.29) позволяет найти значение u_2 приближенного решения задачи (2.1), (2.2) с точностью $O(h^3)$. Чтобы убедиться в этом, вычтем (2.28) из (2.29). Получим

$$u_1 - y_1 = u_0 - y_0 + \frac{h}{2}[f(x_0, u_0) - f(x_0, y_0)] + \frac{h}{2}[f(x_1, u_1) - f(x_1, y_1)] + O(h^3).$$

Предполагая, что $u_0 = y_0$ и используя (2.22), имеем отсюда

$$|u_1 - y_1| \leq \frac{h}{2}L|u_1 - y_1| + O(h^3) \implies (1 - \frac{h}{2}L)|u_1 - y_1| \leq O(h^3). \quad (2.30)$$

Из (2.31) вытекает, что при достаточно малых h в строке $|u_1 - y_1| = O(h^3)$.

Используя далее u_1 в качестве начального условия, мы можем по аналогичной формуле

$$u_2 = u_1 + \frac{h}{2}[f(x_1, u_1) + f(x_2, u_2)]$$

найти значение u_2 и т.д. В результате приходим к общей формуле, в точности совпадающей с формулой (2.26) и позволяющей по заданному значению $u_0 = y_0$ находить последовательно (приближенные) значения u_1, u_2, \dots, u_N приближенного решения задачи (2.1), (2.2).

Отметим однако, что, в отличие от формулы (2.20), формула (2.26) не позволяет, *вообще говоря* выразить u_1 явно через u_0 , поскольку (2.25) представляет собой нелинейное (трансцендентное), в общем случае, уравнение для неизвестной величины u_1 . Для решения этого уравнения можно применить тот или иной итерационный процесс, тем более, что *всегда* имеется хорошее начальное приближение u_0 . Однако труд, затрачиваемый на получение точного значения u_{n+1} из (2.20), будет напрасной потерей времени, так как точность самого уравнения имеет порядок $O(h^3)$. Оказывается, достаточно ограничиться двумя итерациями следующего вида. Сначала вычисляем первое приближение \tilde{u}_{n+1} по формуле метода Эйлера

$$\tilde{u}_{n+1} = u_n + hf(x_n, u_n), \quad (2.31)$$

а затем, подставляя его в правую часть (2.26) вместо u_{n+1} находим окончательное значение u_{n+1} :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[f(x_n, u_n) + f(x_{n+1}, \tilde{u}_{n+1})] \equiv u_n + \frac{h}{2}[f(x_n, u_n) + f(x_{n+1}, u_n + hf(x_n, u_n))]. \quad (2.32)$$

Можно показать (см. например [1]), что пара расчетных формул (2.31), (2.32) действительно определяет u_{n+1} с локальной погрешностью $O(h^3)$. В то же время пара (2.29), (2.30), в отличие от (2.26), дает явное выражение для u_{n+1} через u_n .

Метод численного решения задачи Коши (2.1), (2.2) по формулам (2.31), (2.32) носит одно из следующих 3-х названий:

- 1) метод Эйлера с пересчетом;
- 2) метод Рунге–Кутты 2-го порядка точности;
- 3) метод предиктор–корректор (или прогноза–коррекций).

Последнее название отражает суть формулы (2.32) согласно которой мы сначала прогнозируем значение приближенного решения в точке x_{n+1} по формуле (2.31), а

далее корректируем его с помощью формулы (2.32). Отметим также, что формулы (2.31) и (2.32) позволяют осуществлять определенный контроль точности вычисляемого решения путем сравнения \tilde{u}_{n+1} и u_{n+1} на каждом шаге вычислений. Слишком большая (либо малая) величина разности $u_{n+1} - \tilde{u}_{n+1}$ будет сигнализировать о необходимости уменьшения (либо увеличения) шага h . Меняя в соответствии с этим шаг, можно поддерживать точность на нужном уровне.

Приведем еще одну формулу, имеющую локальный порядок $O(h^3)$. С этой целью применим для вычисления интеграла в (2.5) формулу средних прямоугольников:

$$\int_{x_0}^{x_1} f[x, y(x)]dx = f[x_{1/2}, y(x_{1/2})]h + O(h^3). \quad (2.33)$$

Тогда из (2.16) имеем $y_1 = y_0 + f[x_{1/2}, y(x_{1/2})]h + O(h^3)$. Отсюда после отбрасывания слагаемого $O(h^3)$, приводим к формуле

$$u_1 = u_0 + [f(x_{1/2}, u(x_{1/2}))]h. \quad (2.34)$$

Однако в этой формуле не ясен смысл выражения $u_{1/2}$. Поэтому мы даже не можем определить точность u_1 . Тем не менее на основе неявной формулы (2.34), мы можем построить пару расчетных формул, позволяющих определить u_1 уже в явном виде и с локальной погрешностью, имеющий порядок $O(h^3)$. Указанные формулы имеют вид (мы сразу запишем их для интервала $[x_n, x_{n+1}]$)

$$\tilde{u}_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}f(x_n, u_n), \quad (2.35)$$

$$u_{n+1} = u_n + hf(x_n, \tilde{u}_{n+1}) \equiv u_n + hf[x_n, u_n + \frac{h}{2}f(x_n, u_n)]. \quad (2.36)$$

В отношении формул (2.34), (2.35) справедливо все то же самое, что говорилось о формулах (2.31), (2.32).

Обобщая изложенные способы построения численных методов решения задачи (2.1), (2.2), можно построить методы еще более высоких порядков точности. С этой целью снова вернемся к формуле (2.15) и применим для вычисления интеграла в (2.15) формулу Симпсона.

Глава 2. Введение в метод конечных разностей

Метод *конечных разностей*, или метод *сеток*, в настоящее время является одним из наиболее распространенных методов приближенного решения краевых задач математической физики. Суть метода состоит в следующем [13, с.41]. Область непрерывного изменения аргументов (например, отрезок, прямоугольник и т.д.) заменяется конечным (дискретным) множеством точек (узлов), называемым *сеткой*, вместо функций непрерывного аргумента рассматриваются функции дискретного аргумента, определенные в узлах сетки и называемые *сеточными* функциями. Производные, входящие в дифференциальное уравнение и граничные условия, заменяются (*аппроксимируются*) разностными отношениями, т.е. линейными комбинациями значений функции в некоторых узлах сетки. При этом задача дифференциального уравнения заменяется системой линейных (если исходная задача была линейной) алгебраических уравнений (*разностной схемой*), которая подлежит последующему решению.

§1. Основные понятия метода сеток

1.1. Сетки и сеточные функции. Исходным пунктом в применении метода сеток является замена рассматриваемой области разностной сеткой. Для одномерной задачи, рассматриваемой на интервале $[0, l]$ оси x , в качестве сетки можно взять множество

$$\overline{\omega^h} = \omega^h[0, l] = \{x_i : i = 0, 1, \dots, N; x_0 = 0, x_N = l\}, \quad (1.1)$$

где $x_{i-1} < x_i, i = 1, 2, \dots, N$. Точки x_i , число которых равно $N + 1$ называются *узлами*, величина $h_i = x_i - x_{i-1}$ — *шагом* сетки (1.1). Кроме узлов x_i , называемых *целыми*, часто используются так называемые *полуцелые* узлы $x_{i-1/2} = (x_{i-1} + x_i)/2, i = 1, 2, \dots, N$. Сетка (1.1) называется *равномерной*, если $h_i = h = l/N; i = 1, 2, \dots, N$, и *неравномерной* в противном случае. Крайние узлы x_0 и x_N называются *граничными*. Исключая их из (1.1), получаем *внутреннюю* сетку

$$\omega^h = \omega^h(0, l) = \overline{\omega^h} \setminus \{0, l\} = \{x_i : i = 1, 2, \dots, N - 1\}. \quad (1.2)$$

В случае, когда рассматриваемая область представляет собой прямоугольник $Q = (0, l) \times (0, T)$ в плоскости x, t , для построения двумерной сетки $\omega^{h\tau}$ вводят наряду с одномерной пространственной сеткой (1.1) временную сетку

$$\overline{\omega^\tau} = \omega^\tau[0, T] = \{t_m : m = 0, 1, \dots, M; t_0 = 0, t_M = T\}, \quad (1.3)$$

где $t_{m-1} < t_m$ (равномерную при $\tau_m \equiv t_m - t_{m-1} = \tau = \frac{T}{M}$), и полагают (рис. 3а), что

$$\overline{\omega^{h\tau}} = \overline{\omega^h} \times \overline{\omega^\tau} = \{(x_i, t_m) : i = 0, 1, \dots, N; m = 0, 1, \dots, M\}. \quad (1.4)$$

Сетка (1.4) называется *равномерной*, если обе сетки (1.1) и (1.3) равномерны, и *неравномерной* в противном случае. Набор узлов (x_i, t_m) при $0 \leq i \leq N$ и фиксированном t называются *t -м временным слоем*, при этом нижний слой, состоящий из узлов $(x_i, 0)$ при $0 \leq i \leq N$, называют *начальным слоем*. Аналогичным образом вводятся сетки в прямоугольнике $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2)$ плоскости x, y (рис. 3б), в параллелепипеде $Q = (0, l_1) \times (0, l_2) \times (0, T)$ и т.д.

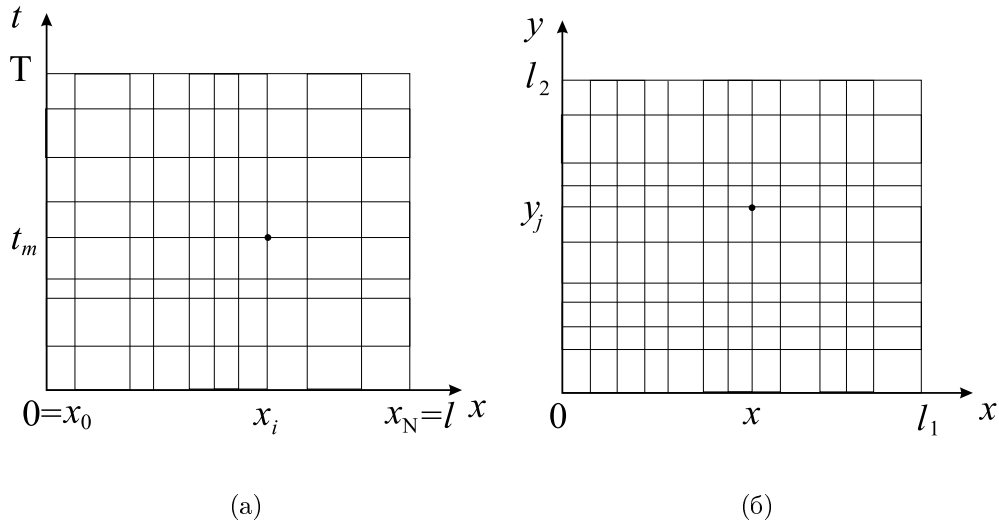


Рис. 3: Примеры двумерных сеток

Следующий этап метода сеток заключается во введении вместо функций непрерывного аргумента функций, определенных в узлах сетки и называемых *сеточными функциями*. Будем обозначать сеточные функции символом v^h, f^h в случае стационарных задач и $v^{h\tau}, f^{h\tau}$ для нестационарных задач. (Впрочем, индексы h и τ в этих обозначениях так же, как в обозначениях сетки, часто будем опускать). Для значений сеточных функций в узлах будем использовать следующие обозначения

$$v^h(x_i) = v_i, v^h(x_{i\pm 1}) = v_{i\pm 1}, v^{h\tau}(x_i, t_m) = v_i^m, v^h(x_i, y_j) = v_{ij}, \dots$$

Любую сеточную функцию v^h , заданную на сетке (1.1), можно представить в виде вектора: $v^h = (v_0, v_1, \dots, v_N)$. Поэтому множество сеточных функций на сетке (1.1) образует конечномерное пространство H размерности $N + 1$, которое обозначим через $H_{N+1}^h = H_{N+1}$. Индекс h означает, что указанное пространство так же, как и сетка, зависит от h как от параметра. (Под h мы понимаем либо шаг сетки, если она равномерная, либо вектор (h_1, h_2, \dots, h_N) в случае неравномерной сетки). Точно так же множество сеточных функций, определенных на сетке (1.2) образует $N - 1$ мерное подпространство H_{N-1} . В пространстве H_{N+1} (либо H_{N-1}) можно ввести норму, при-

чем многими способами. Мы будем использовать обычно две нормы на равномерной сетке: *евклидову*

$$\|v\|^2 \equiv \|v\|_{L^2(\omega^h)}^2 = \sum_{i=1}^{N-1} v_i^2 h, \quad v \in H_{N-1}, \quad (1.5)$$

порожденную евклидовым скалярным произведением

$$(v, w) = \sum_{i=1}^{N-1} v_i w_i h, \quad v, w \in H_{N-1} \quad (1.6)$$

и являющуюся сеточным аналогом нормы пространства $L^2(0, l)$, и *равномерную*

$$\|v\| \equiv \|v\|_{C(\overline{\omega^h})} = \max_{x \in \overline{\omega^h}} |v(x)| = \max_{0 \leq i \leq N} |v_i|, \quad v \in H_{N+1}, \quad (1.7)$$

являющуюся сеточным аналогом нормы пространства $C[0, l]$.

Целью применения метода сеток является сведение точной дифференциальной задачи к приближенной разностной задаче для нахождения сеточного решения v^h , близкого к точному решению u исходной задачи. Сеточное решение есть функция дискретного аргумента, решение дифференциальной задачи u – функция непрерывного аргумента. Они принадлежат разным функциональным пространствам: $u \in U$, $v^h \in U_h$. Поэтому возникает вопрос, как судить о степени близости этих функций. Для решения этого вопроса есть два пути.

Первый путь состоит в продолжении сеточного решения v^h на все точки исходной области в виде некоторой функции v , что может быть осуществлено многими способами, например, с помощью интерполяционных многочленов или сплайнов. Считая далее, что продолженная функция v лежит в том же функциональном пространстве U , что и точное решение u , можно оценить разность между ними по норме этого пространства (например, по максимуму разности во всех точках интервала $[0, l]$), если $U = C[0, l]$.

Второй путь, который и будет использоваться в дальнейшем, противоположен первому и заключается в том, что точному решению u ставится в соответствие сеточная функция u^h , определенная на той же сетке $\overline{\omega^h}$, что и сеточное решение v^h . Сеточную функцию u^h называют *проекцией* решения u на сетку $\overline{\omega^h}$ (или на соответствующее сеточное пространство U_h функций, определенных на сетке $\overline{\omega^h}$), а близость функций u и v^h характеризуется тогда величиной $\|v^h - u^h\|_{U_h}$, где $\|\cdot\|_{U_h}$ – некоторая норма в U_h .

Соответствие между функциями непрерывного аргумента и их точными аналогами может быть установлено различными способами. Так, если функция непрерывна на $[0, l]$, то для сетки (1.1) можно положить $u^h(x_i) = u(x_i)$, $0 \leq i \leq N$, либо

$u^h(x_i) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) dx$. Хотя второй способ универсальнее первого, поскольку его можно применять не только для непрерывных, но и интегрируемых функций, мы будем использовать первый способ ввиду его простоты.

1.2. Разностная аппроксимация дифференциальных операторов. Основной момент в применении метода сеток состоит в переходе от дифференциальных уравнений для функций непрерывных аргументов, описывающих *непрерывный* физический процесс, к соответствующим соотношениям для сеточных функций, называемых *разностными* уравнениями. Всякое дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$Lu = f, \quad (1.8)$$

где u – неизвестная функция, f – заданная правая часть, L – дифференциальный оператор, символически указывающий, какие действия нужно проделать с функцией u , чтобы получить правую часть f .

Пусть v – произвольная функция из области определения $D(L)$ оператора L . Заменяя входящие в дифференциальное выражение Lv производные разностными отношениями, а функцию v – сеточной функцией v^h , определенной на некоторой сетке, например, (1.1) в случае одномерной задачи, мы получим разностное выражение $L_h v^h$. Результатом действия дифференциального оператора L на функцию $v \in D(L)$ является некоторая функция $Lv(x)$, определенная в тех же точках (или в некоторой части точек) области, где определена функция v . Точно также результатом действия разностного оператора L_h на сеточную функцию v^h является сеточная функция $L_h v^h$, определенная во всех узлах (или в некоторой части узлов) разностной сетки $\overline{\omega^h}$, на которой определена сеточная функция v^h . Впрочем иногда на $L_h v^h$ бывает удобно смотреть как на сеточную функцию, определенную в узлах другой разностной сетки, например, в полупелых узлах исходной разностной сетки.

Пусть x – узел из области определения сеточной функции $L_h v^h$, в частности, он может совпадать с узлом x_i исходной сетки $\overline{\omega^h}$. Выражение $L_h v^h(x)(L_h v^h(x_i))$, т.е. значение сеточной функции $L_h v^h$ в узле $x(x_i)$ связывает значения сеточной функции v^h на некотором множестве $\omega(x)$ узлов сетки $\overline{\omega^h}$, называемом *шаблоном* разностного оператора L_h в точке $x(x_i)$. Поэтому аппроксимация дифференциального оператора разностным в точке x включает в себя два этапа:

- 1) выбор подходящего шаблона $\omega(x)$ и
- 2) собственно аппроксимацию дифференциального оператора L разностным L_h на шаблоне $\omega(x)$.

Изучение разностных аппроксимаций дифференциальных операторов и, в част-

ности, исследование ошибки, допускаемой при замене оператора L разностным L_h , вначале обычно проводят локально, т.е. в любой точке (узле) x . С этой целью вводят величину

$$\psi(x) = L_h v(x) - Lv(x), \quad (1.9)$$

называемую *погрешностью* аппроксимации оператора L разностным оператором L_h в точке x . Здесь v – произвольная функция и некоторого пространства V достаточно гладких функций, определенных в некоторой окрестности точки x , содержащей шаблон $\omega(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Говорят, что разностный оператор L_h *локально* аппроксимирует в точке x дифференциальный оператор L с порядком p на функциях пространства V , если

$$|\psi(x)| = |L_h v(x) - Lv(x)| \leq Ch^p, \quad (|\psi(x)| = O(h^p)) \quad \forall v \in V, \quad (1.10)$$

где C – постоянная, не зависящая от h , но зависящая от x и v .

Рассмотрим конкретные примеры аппроксимации дифференциальных операторов разностными на равномерных для простоты сетках.

ПРИМЕР 1. Пусть $Lv = v' \equiv \frac{dv}{dx}$. Фиксируем некоторую точку оси x и пусть $h > 0$. Учитывая, что

$$v'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x) - v(x-h)}{h}, \quad (1.11)$$

для аппроксимации $v'(x)$ можно воспользоваться одной из формул

$$v_x(x) = \frac{v(x+h) - v(x)}{h}, \quad v_{\bar{x}}(x) = \frac{v(x) - v(x-h)}{h}. \quad (1.12)$$

Выражение v_x называется *правой*, а $v_{\bar{x}}$ – *левой* разностной производной. Кроме того, можно взять линейную комбинацию v_x и $v_{\bar{x}}$ вида

$$\sigma v_x(x) + (1 - \sigma)v_{\bar{x}}(x), \quad \sigma \in \mathbb{R}. \quad (1.13)$$

При $\sigma = 1/2$ (1.13) переходит в *центральную* разностную производную

$$v_x(x) = \frac{1}{2} [v_x(x) + v_{\bar{x}}(x)] = \frac{v(x+h) - v(x-h)}{2h}. \quad (1.14)$$

Определим порядки аппроксимации разностных выражений (1.12), (1.14). С этой целью, считая v гладкой функцией, например, класса C^{n+1} в окрестности точки x , разложим ее по формуле Тейлора

$$v(x \pm h) = v(x) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{d^k v(x)}{dx^k} (\pm h)^k + O(h^{n+1}). \quad (1.15)$$

Используя формулу (1.15), имеем тогда по порядку

$$\psi^+(x) = v_x(x) - v'(x) = \frac{1}{h}[v'(x)h + O(h^2)] - v'(x) = O(h), \quad v \in C^2,$$

$$\psi^-(x) = v_{\bar{x}}(x) - v'(x) = \frac{1}{h}[v'(x)h + O(h^2)] - v'(x) = O(h), \quad v \in C^2,$$

$$\overset{\circ}{\psi}(x) = v_{\overset{\circ}{x}}(x) - v'(x) = \frac{1}{2h}[2v'(x)h + O(h^3)] - v'(x) = O(h^2), \quad v \in C^3.$$

Отсюда вытекает, что если разностные производные (1.12) и (1.13) аппроксимируют $v'(x)$ в точке x с порядком $O(h)$ на функции $v \in C^2$, то центральная производная (1.14) аппроксимирует $v'(x)$ с порядком $O(h^2)$ на функции $v \in C^3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае, когда $x = x_i \in \omega^h$, выражения (1.12) и (1.14) принимают соответственно вид

$$v_x(x_i) = \frac{v_{i+1} - v_i}{h}, \quad v_{\bar{x}}(x_i) = \frac{v_i - v_{i-1}}{h}, \quad v_{\overset{\circ}{x}}(x_i) = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h}. \quad (1.16)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Подчеркнем, что порядок аппроксимации зависит от точки x , относительно которой рассматривается разностная производная. Действительно, рассмотрим, например, выражение

$$\frac{v_{i+1} - v_i}{h}. \quad (1.17)$$

Ясно, что (1.17) представляет собой правую производную относительно узла x_i , левую – относительно узла x_{i+1} и центральную производную относительно полуцелого узла $x_{i+1/2} = (x_{i+1} + x_i)/2$. Следовательно, (1.17) аппроксимирует производную $v'(x)$ при $x = x_i$ и $x = x_{i+1}$, а также при любом $x \neq x_{i+1/2}$ с порядком $O(h)$ на функции $v \in C^2$, а при $x = x_{i+1/2}$ – с порядком $O(h^2)$ на функции $v \in C^3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Подчеркнем, что аппроксимации (1.12), (1.14) являются двухточечными. Очевидно, что двухточечный шаблон является *минимально возможным* для аппроксимации производной v' . Наряду с ними существует бесчисленное множество разностных аппроксимаций, шаблоны которых состоят из трех и более точек. В качестве примера отметим разностную аппроксимацию (1.13), определенную на трехточечном шаблоне $(x - h, x, x + h)$ при $\sigma \neq 1/2$. Другим примером является *односторонняя* правая производная

$$-\frac{1}{2h}(3v_i - 4v_{i+1} - v_{i+2}). \quad (1.18)$$

Легко проверить, используя формулу (1.15) и ее аналог, получающийся заменой h на $2h$, что

$$-\frac{1}{2h}(3v_i - 4v_{i+1} + v_{i+2}) - v'(x_i) = O(h^2), \quad v \in C^3.$$

ПРИМЕР 2. Пусть $Lv = v''$, x – произвольный узел. Учитывая, что

$$v''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v'(x+h) - v'(x)}{h},$$

естественно аппроксимировать v'' при помощи формулы

$$v_{\bar{x}x}(x) = \frac{v_{\bar{x}}(x+h) - v_{\bar{x}}(x)}{h} = \frac{v(x-h) - 2v(x) + v(x+h)}{h^2}. \quad (1.19)$$

Пользуясь формулой (1.15), легко получаем, что

$$v_{\bar{x}x}(x) - v''(x) = \frac{h^2}{12}v^4(x) + \frac{h^4}{360}v^6(x) + O(h^6), \quad v \in C^8,$$

$$v_{\bar{x}x}(x) - v''(x) = \frac{h^2}{12}v^4(x) + O(h^4), \quad v \in C^4, \quad v_{\bar{x}x}(x) - v''(x) = O(h^2), \quad v \in C^4. \quad (1.20)$$

Отсюда следует, что $v_{\bar{x}x}$ аппроксимирует v'' с порядком $O(h^2)$ при $v \in C^4$. При $x = x_i$ формула (1.19) принимает вид

$$v_{\bar{x}x}(x) \equiv v_{\bar{x}x}(x_i) = \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2}. \quad (1.21)$$

Подчеркнем, что трехточечный шаблон является минимально возможным для аппроксимации производной v'' .

ПРИМЕР 3. Пусть $Lv = v^4$, x – произвольный узел. Выберем симметричный пятиточечный шаблон $\omega_5(x) = (x-2h, x-h, x, x+h, x+2h)$ и положим $L_h v(x) = v_{\bar{x}x\bar{x}x}(x)$. Используя формулу (1.19) для $v_{\bar{x}x}$, легко получаем, что

$$v_{\bar{x}x\bar{x}x}(x) = \frac{1}{h^4}[v(x-2h) - 4v(x-h) + 6v(x) - 4v(x+h) + v(x+2h)]. \quad (1.22)$$

Нетрудно проверить, используя (1.15) и ее аналог при замене h на $2h$, что

$$v_{\bar{x}x\bar{x}x}(x) - v^4(x) = O(h^2), \quad v \in C^6. \quad (1.23)$$

Формулу (1.23) можно использовать для повышения порядка аппроксимации производной v^4 . Действительно, в силу (1.20) и (1.23)

$$v_{\bar{x}x}(x) - v''(x) = \frac{h^2}{12}v^4(x) + O(h^4) = \frac{h^2}{12}v_{\bar{x}x\bar{x}x}(x) + O(h^4).$$

Отсюда следует, что оператор

$$v_{\bar{x}x}(x) - \frac{h^2}{12}v_{\bar{x}x\bar{x}x}(x), \quad (1.24)$$

определенный на пятиточечном шаблоне $\omega_5(x)$, аппроксимирует v'' порядком $O(h^4)$ при $v \in C^6$. В принципе указанный процесс повышения порядка аппроксимации можно продолжить и дальше и получить любой порядок аппроксимации в классе достаточно гладких функций. Однако при этом число узлов используемого шаблона необходимо растет. Поскольку другие качества (о которых речь пойдет ниже) соответствующих разностных операторов ухудшаются, то такой прием повышения порядка аппроксимации не всегда можно рекомендовать для практического применения.

1.3. Постановка разностной задачи. Разностная схема. До сих пор мы занимались аппроксимацией дифференциальных операторов разностными. Однако задачи математической физики помимо дифференциальных дифференциальных уравнений включает и дополнительные условия краевые и начальные, выделяющие единственное решение из всей совокупности возможных решений. Поэтому процесс дискретизации исходной непрерывной задачи наряду с аппроксимацией дифференциального оператора включает в себя также аппроксимацию дополнительных условий (начальных или краевых) разностными. Совокупность разностных уравнений, аппроксимирующих основное дифференциальное уравнение и дополнительные условия, будем называть *разностной задачей*, а совокупность всех разностных задач, зависящих от h как от параметра, – *разностной схемой*. Хотя следует заметить, что под разностной схемой часто понимают саму разностную задачу или даже систему разностных уравнений, аппроксимирующих рассматриваемые дифференциальные уравнения. Поясним сказанное на примерах.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$u'(x) = f(x, u), \quad x \in [0, l]; \quad u(0) = g. \quad (1.25)$$

Выберем простейшую равномерную сетку (1.1) и поставим в соответствие задаче (1.25) следующую задачу

$$v_x(x_i) = f_i^h \equiv f(x_i, v_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N - 1; \quad v_0 = g. \quad (1.26)$$

Переписав (1.26) с учетом (1.12) в виде

$$v_{i+1} = v_i + hf(x_i, v_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N - 1; \quad v_0 = g, \quad (1.27)$$

получаем рекуррентную формулу, позволяющую по заданному значению g последовательно вычислять значения v_1, v_2, \dots, v_N приближенного решения v^h . Указанная формула (1.27) носит название *метода Эйлера* решения задачи (1.25).

ПРИМЕР 2. Рассмотрим краевую задачу для уравнения 2-го порядка

$$u''(x) = -f(x), \quad x \in (0, l); \quad u(0) = g_1; \quad u(l) = g_2. \quad (1.28)$$

Выберем опять равномерную сетку (1.1) и поставим в соответствие дифференциальной задаче (1.28) разностную задачу

$$\frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = -f_i^h, \quad x \in (0, l); \quad u(0) = g_1; \quad u(l) = g_2. \quad (1.29)$$

При этом правую часть f_i^h можно задавать различными способами, например, положить $f_i^h = f(x_i), i = 1, 2, \dots, N - 1$. При каждом i разностное уравнение в (1.29)

связывает значения решения в трех узлах: x_{i-1}, x_i, x_{i+1} . Поэтому его называют *трехточечным* (синоним трехточечная схема), а задача (1.29) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений вида

$$a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i, \quad a_i \neq 0, \quad b_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$y_0 = x_1 y_1 + g_1, \quad y_N = x_2 y_{N-1} + g_2 \quad (1.30)$$

при $a_i = b_i = 1/h^2$, $c_i = 2/h^2$, $x_1 = x_2 = 0$. Матрица системы (1.30) называется *трехдиагональной*, поскольку у нее отличны от нуля только коэффициенты, стоящие на трех диагоналях – главной и двух соседних. Для решения системы (1.30) развит специальный метод *прогонки*, являющейся вариантом метода исключения Гаусса. Указанный метод требует для своей реализации $O(N)$ (примерно $8N$) арифметических операций [12, с.36] (см. также п.1 §12) и *устойчив* по отношению к ошибкам округления, если

$$|c_i| \geq |a_i| + |b_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad |x_1| \leq 1, \quad |x_2| \leq 1, \quad |x_1 + x_2| < 2. \quad (1.31)$$

Поскольку условия (1.31) для системы (1.30) выполняются, то для решения применим метод прогонки, так что система (1.30) легко реализуется на ЭВМ.

В приведенных примерах обе разностные задачи однозначно разрешимы при любом h , причем их решение v^h легко находится (по формуле (1.27) в случае задачи (1.25) и методом прогонки в случае задачи (1.29)). Однако в обоих случаях остался не выясненным вопрос, будет ли сеточное решение v^h стремиться к точному u при $h \rightarrow 0$. Решению этого вопроса в общем случае ввиду его важности мы посвящаем следующий параграф.

§2. Основная теорема теории разностных схем

2.1. Постановка дифференциальной и разностной задач. Рассмотрим в области $Q = \Omega \times (0, T)$, где $\Omega \in \mathbb{R}^m$ – некоторая ограниченная область, например, $\Omega = (0, l)$ при $m = 1$, дифференциальную краевую задачу

$$Lu = f, \quad u \in U, \quad f \in F, \quad (2.1)$$

$$Bu = g, \quad g \in G.$$

Здесь $L : U \rightarrow F$ – некоторый дифференциальный оператор, область определения D_L (значений R_L) которого принадлежит нормированному пространству $U(F)$ функций, определенных в Q , с нормой $\|\cdot\|_U (\|\cdot\|_F)$, B – “граничный” оператор, область

определения D_B которого принадлежит U , а область значений R_B принадлежит нормированному пространству G с нормой $\|\cdot\|_G$, состоящему из функций, определенных на границе ∂Q области Q (или некоторой ее части).

Введем в области Q разностную схему

$$L_{h\tau}v^{h\tau} = f^{h\tau}, \quad v^{h\tau} \in U_{h\tau}, \quad f^{h\tau} \in F_{h\tau} \quad (2.2)$$

$$B_{h\tau}v^{h\tau} = g^{h\tau}, \quad g^{h\tau} \in G_{h\tau}.$$

Здесь $L_{h\tau}$ – сеточный аналог оператора L , область определения $D_{L_{h\tau}}$ (значений $R_{L_{h\tau}}$) которого принадлежит сеточному аналогу $U_{h\tau}(F_{h\tau})$ пространства $U(F)$ с нормой $\|\cdot\|_{U_{h\tau}}(\|\cdot\|_{F_{h\tau}})$, $B_{h\tau}$ – сеточный аналог “граничного” оператора B , область определения $D_{B_{h\tau}}$ которого принадлежит $U_{h\tau}$, а область значений $R_{B_{h\tau}}$ – сеточному аналогу $G_{h\tau}$ пространства G с нормой $\|\cdot\|_{G_{h\tau}}$. Будем предполагать, что существуют линейные операторы проектирования

$$P_{h\tau}^{(1)} : U \rightarrow U_{h\tau}, \quad P_{h\tau}^{(2)} : F \rightarrow F_{h\tau}, \quad P_{h\tau}^{(3)} : G \rightarrow G_{h\tau}$$

и выполнения условия согласования норм

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} \|P_{h\tau}^{(1)}u\|_{U_{h\tau}} = \|u\|_U, \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} \|P_{h\tau}^{(2)}f\|_{F_{h\tau}} = \|f\|_F, \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} \|P_{h\tau}^{(3)}g\|_{G_{h\tau}} = \|g\|_G. \quad (2.3)$$

Отметим при этом, что если элементами пространства $U_{h\tau}$ являются сеточные функции, определенные во всех узлах сетки $\overline{\omega^{h\tau}}$, то элементы (сеточные функции) из пространства $F_{h\tau}$ заданы, вообще говоря, лишь на некоторой части узлов сетки $\overline{\omega^{h\tau}}$, либо даже на другой сетке, например, в полуцелых узлах сетки $\overline{\omega^{h\tau}}$. Наконец, сеточные функции, принадлежащие $G_{h\tau}$, определены на границе сетки $\overline{\omega^{h\tau}}$, либо некоторой ее части.

2.2. Сходимость, аппроксимация и устойчивость разностных схем. Основная теорема. Предположим, что при любых h и τ разностная задача (2.2) имеет единственное решение $v^{h\tau}$. Возникает тогда естественный вопрос: будет ли сеточное решение $v^{h\tau}$ стремиться при $h \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow 0$ к точному решению u дифференциальной задачи (2.1) при условии конечно, что последнее существует и единственно. Полагая $u^{h\tau} = P_{h\tau}^{(1)}u$, введем следующее основное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Говорят, что схема (2.2) является *сходящейся* или что ее решение $v^{h\tau}$ сходится к решению u задачи (2.1), если

$$\|v^{h\tau} - u^{h\tau}\|_{U_{h\tau}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h, \tau \rightarrow 0. \quad (2.4)$$

Если при этом существуют такие положительные постоянные h_0, τ_0 и C , не зависящие от h и τ , что при всех $h \leq h_0$ и $\tau \leq \tau_0$ имеет место неравенство

$$\|v^{h\tau} - u^{h\tau}\|_{U_{h\tau}} \leq C(h^p + \tau^q), \quad (2.5)$$

то говорят, что разностная схема (2.2) *сходится со скоростью* $O(h^p + \tau^q)$ (имеет *точность* $O(h^p + \tau^q)$), или что ее решение $v^{h\tau}$ *сходится* к решению u задачи (2.1) с *порядком* p по x и q по t .

Чтобы исследовать вопрос о сходимости разностной схемы, введем еще два основных понятия: понятие порядка аппроксимации разностной схемы на решении и понятие ее корректности или устойчивости.

Подставим в (2.2) вместо $v^{h\tau}$ проекцию $u^{h\tau} \in U_{h\tau}$ решения u задачи (2.1). Поскольку функция $u^{h\tau}$ не обязательно является решением задачи (2.2), то при подставке $u^{h\tau}$ в (2.2) возникает *невязка*

$$\delta f^{h\tau} = (L_{h\tau}u^{h\tau} - f^{h\tau}) \in F_{h\tau}, \quad (2.6)$$

обусловленная неточностью аппроксимации дифференциального уравнения разностным, и невязка

$$\delta g^{h\tau} = (B_{h\tau}u^{h\tau} - g^{h\tau}) \in G_{h\tau}, \quad (2.7)$$

вызванная неточностью аппроксимации *граничных* условий в (2.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Говорят, что разностная схема (2.2) *аппроксимирует* дифференциальную задачу (2.1) на ее решении u , если

$$\|\delta f^{h\tau}\|_{F_{h\tau}} + \|\delta g^{h\tau}\|_{G_{h\tau}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h, \tau \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

Если, кроме того, существуют такие положительные постоянные h_0 , τ_0 , C_1 и C_2 , что при всех $h < h_0$ и $\tau < \tau_0$ выполняются неравенства

$$\|\delta f^{h\tau}\|_{F_{h\tau}} \leq C_1(h^{p_1} + \tau^{q_1}), \quad \|\delta g^{h\tau}\|_{G_{h\tau}} \leq C_2(h^{p_2} + \tau^{q_2}), \quad (2.9)$$

то будем говорить, что схема (2.2) *аппроксимирует* дифференциальную задачу (2.1) на ее решении u с *порядком* p по x и q по t , где $p = \min(p_1, p_2)$, $q = \min(q_1, q_2)$ (или, что порядок аппроксимации схемы (2.2) на решении u задачи (2.1) равен $O(h^p + \tau^q)$).

Напомним далее, что задача (2.1) называется *корректной* на паре пространства $(U, F \times G)$, если для каждой пары $(f, g) \in F \times G$ решение $u \in U$ задачи (2.1) существует, единственное и непрерывно зависит от (f, g) . Последнее свойство называют *устойчивостью* решения на паре $(U, F \times G)$. Аналогично определяется корректность схемы (2.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Разностная схема (2.2) называется *корректной* на паре пространств $(U_{h\tau}, F_{h\tau} \times G_{h\tau})$, если существуют такие положительные числа h_0, τ_0 , что при $h < h_0$ и $\tau < \tau_0$ для каждой пары $(f^{h\tau}, g^{h\tau}) \in F_{h\tau} \times G_{h\tau}$ решение $v^{h\tau} \in U_{h\tau}$ существует, единственно и непрерывно (устойчиво) зависит от $(f^{h\tau}, g^{h\tau})$.

Последнее условие аналитически означает, что для любой пары $(f^{h\tau}, g^{h\tau}) \in F_{h\tau} \times G_{h\tau}$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что из условий

$$\|\tilde{f}^{h\tau} - f^{h\tau}\|_{F_{h\tau}} \leq \delta \quad \text{и} \quad \|\tilde{g}^{h\tau} - g^{h\tau}\|_{G_{h\tau}} \leq \delta$$

вытекает условие

$$\|\tilde{v}^{h\tau} - v^{h\tau}\|_{U_{h\tau}} \leq \varepsilon.$$

Здесь $(\tilde{f}^{h\tau}, \tilde{g}^{h\tau})$ – возмущенные исходные данные, $v^{h\tau}(\tilde{v}^{h\tau})$ – решение задачи (2.2), отвечающее исходным данным $(f^{h\tau}, g^{h\tau})(\tilde{f}^{h\tau}, \tilde{g}^{h\tau})$. В частном случае, когда операторы $L_{h\tau}$ и $B_{h\tau}$ линейны, условие устойчивости эквивалентно выполнению следующей оценки

$$\|\tilde{v}^{h\tau} - v^{h\tau}\|_{U_{h\tau}} \leq D_1 \|\tilde{f}^{h\tau} - f^{h\tau}\|_{F_{h\tau}} + D_2 \|\tilde{g}^{h\tau} - g^{h\tau}\|_{G_{h\tau}}, \quad (2.10)$$

где D_1 и D_2 – некоторые постоянные, не зависящие от h и τ . В силу линейности задачи (2.2) паре $\tilde{f}^{h\tau} = 0, \tilde{g}^{h\tau} = 0$ отвечает единственное решение $\tilde{v}^{h\tau} = 0$. Поэтому из (2.10) имеем

$$\|v^{h\tau}\|_{U_{h\tau}} \leq D_1 \|f^{h\tau}\|_{F_{h\tau}} + D_2 \|g^{h\tau}\|_{G_{h\tau}}. \quad (2.11)$$

Легко проверить, используя линейность операторов $L_{h\tau}$ и $B_{h\tau}$, что справедливо и обратное, т.е., что из (2.11) вытекает (2.10). Это означает, что в линейном случае условия (2.10) и (2.11) эквивалентны, чем мы в дальнейшем часто будем пользоваться.

Следует отметить, что *устойчивость* часто используют в более широком смысле, понимая под устойчивостью корректность разностной схемы в смысле определения 3. Устойчивость называется *безусловной*, если (2.10) выполняется при любых соотношениях между шагами h и τ , лишь бы они были достаточно малы. Если же для выполнения (2.10) шаги h и τ , кроме естественного стремления к нулю, должны удовлетворять некоторым дополнительным условиям вида $\Phi(h, \tau) \leq 0$, то устойчивость называется *условной*. Аналогичным образом определяется условная сходимость и условная аппроксимация. Подчеркнем, что согласно определению 3 корректность (устойчивость) есть некоторое внутреннее свойство разностной схемы. Оно формулируется независимо от какой-либо связи с дифференциальной задачей, а также независимо от аппроксимации и сходимости разностной схемы. Однако справедлива следующая фундаментальная

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются следующие условия:

1. Для заданной пары $(f, g) \in F \times G$ решение $u \in U$ дифференциальной задачи (2.1) существует и единственно.
2. Операторы $L_{h\tau}$ и $B_{h\tau}$ линейны.

3. Разностная схема (2.2) аппроксимирует задачу (2.1) на данном решении u .

4. Разностная схема (2.2) корректна.

Тогда при $h, \tau \rightarrow 0$ решение $v^{h\tau}$ разностной схемы (2.2) сходится к точному решению u задачи (2.1). Если при этом выполняются неравенства (2.9), так что схема (2.2) аппроксимирует задачу (2.1) на решении u с порядком p по x и q по t , то сходимость разностной схемы (2.2) будет иметь тот же порядок p по x и q по t , причем справедливы неравенства

$$\|v^{h\tau} - u^{h\tau}\|_{U_{h\tau}} \leq C(h^p + \tau^q).$$

Здесь $C = \max\{C_1D_1, C_2D_2\}$, где C_1, D_1, C_2, D_2 – постоянные, входящие в (2.9) – (2.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычитая первое уравнение (2.2) из (2.6), второе уравнение (2.2) из (2.7), будем иметь в силу линейности операторов $L_{h\tau}$ и $B_{h\tau}$:

$$L_{h\tau}(u^{h\tau} - v^{h\tau}) = \delta f^{h\tau}, \quad B_{h\tau}(u^{h\tau} - v^{h\tau}) = \delta g^{h\tau}.$$

Используя далее неравенство (2.11), в котором следует заменить $v^{h\tau}, f^{h\tau}, g^{h\tau}$ соответственно на $u^{h\tau} - v^{h\tau}, \delta f^{h\tau}, \delta g^{h\tau}$ и условие (2.8), получим

$$\|v^{h\tau} - u^{h\tau}\|_{U_{h\tau}} \leq D_1\|\delta f^{h\tau}\|_{F_{h\tau}} + D_2\|\delta g^{h\tau}\|_{G_{h\tau}} \rightarrow 0 \quad \text{при } h, \tau \rightarrow 0.$$

Если к тому же выполняются неравенства (2.9), то имеем

$$\|v^{h\tau} - u^{h\tau}\|_{U_{h\tau}} \leq C_1D_1(h^{p_1} + \tau^{q_1}) + C_2D_2(h^{p_2} + \tau^{q_2}) \leq C(h^p + \tau^q),$$

где $C = C_1D_1 + C_2D_2$, $p = \min(p_1, p_2)$, $q = \min(q_1, q_2)$. Теорема доказана.

Теорему 1 кратко формулируют еще так: *Из аппроксимации и устойчивости следует сходимость.*

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Если аппроксимация или устойчивость носят условный характер, то и сходимость будет являться условной, т.е. будет иметь место лишь при определенных отношениях между шагами h и τ , указанных условиями аппроксимации или устойчивости.

2. Из результатов п.2 следует, что доказательство сходимости разностной схемы и изучение ее порядка точности (скорости сходимости) сводится при выполнении условий теоремы 1 к определению ее порядка аппроксимации и исследованию устойчивости, т.е. получению оценок вида (2.10) или (2.11), называемых *априорными оценками*. Этим мы будем постоянно пользоваться в следующих главах при исследовании конкретных разностных схем.

3. В силу определения 2 порядок аппроксимации разностной схемы (2.2) определяется порядком аппроксимации дифференциального уравнения и граничных условий, входящих в (2.1). В случае нестационарных (эволюционных) задач, граничные условия (по отношению к области $Q = \Omega \times (0, T)$) подразделяются на собственно граничные условия (по отношению к Ω) и начальные условия. При этом порядки аппроксимации собственно граничных условий и начальных условий часто бывают различными. Ввиду этого при численном решении конкретных начально-краевых задач математической физики пространство G следует разбивать на два пространства, скажем G_1 и G_2 , состоящие соответственно из функций, определенных на границе $\partial\Omega$ области Ω (или некоторой части $\partial\Omega$) и при $t = 0$, и отдельно вычислять невязки, вызываемые неточностью аппроксимации собственно граничных и начальных условий.

Порядок аппроксимации начальных или граничных условий обычно бывает легко определить, часто они аппроксимируются абсолютно точно. Для определения порядка аппроксимации дифференциального уравнения обычно рассматривают сужение $\delta f^{h\tau}(x, t)$ невязки (2.6) на узел (x, t) , входящий в область ее определения. Если

$$\delta f^{h\tau}(x, t) = O(h^p + \tau^q),$$

где числа p и q зависят в общем случае от узла (x, t) , то величину $O(h^p + \tau^q)$ называют *локальным* порядком аппроксимации дифференциального уравнения разностным в узле (x, t) . Зная локальный порядок аппроксимации в каждом узле (x, t) , далее нетрудно определить порядок нормы $\|\delta f^{h\tau}\|_{F_{h\tau}}$, на который в дальнейшем будем ссылаться как на глобальный порядок аппроксимации.

4. Наряду с введенным выше общим определением устойчивости разностной схемы по исходным данным вводят частные типы устойчивости: по правой части, начальным данным и краевым условиям. В частности, схема (2.2) называется устойчивой по правой части если для ее решения выполняется оценка (2.11) при $g^{h\tau} = 0$. Ясно, что для линейной задачи из устойчивости разностной схемы по правой части, начальным данным и краевым условиям следует ее общая устойчивость и наоборот. В то же время для исследования каждого из введенных типов устойчивости можно применить свои специфические методы: метод *энергетических неравенств*, метод *гармоник*, метод, основанный на *принципе максимума* и др. Указанные методы поясняются в §6 на примере уравнения переноса субстанции. При этом оказывается, что в некоторых случаях один тип устойчивости влечет за собой устойчивость другого типа. Так, например, из устойчивости по начальным данным часто следует устойчивость по правой части и наоборот [12, с.327]. Наконец отметим, что для разностных схем, аппроксимирующих дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, вводят также устойчивость относительно малых возмущений переменных

коэффициентов.

5. В §1 при построении разностных схем для задач (1.25) и (1.28) применялся метод *разностного дифференцирования*. В §§4–7 при построении разностных схем для уравнений 1-го порядка мы будем применять интегро-интерполяционный метод (или метод баланса). Кроме них следует отметить еще ряд методов построения разностных схем: неопределенных коэффициентов, конечных элементов (или вариационно-разностный метод) аппроксимации квадратичного функционала и аппроксимации интегрального тождества, подробное описание которых можно найти в [8,10,12,13] и других учебниках.

6. Численное решение задачи математической физики состоит из двух этапов: 1) построения разностной схемы (т.е. системы сеточных уравнений), аппроксимирующей рассматриваемую задачу и исследования ее точности, т.е. устойчивости и порядка аппроксимации в случае линейной задачи, 2) решение полученной системы сеточных уравнений. В следующих главах мы будем заниматься главным образом первым этапом. Однако при построении разностных схем всегда нужно помнить и о втором этапе, связанном с реализацией построенной схемы на ЭВМ. С этой точки зрения важно, чтобы указанная реализация, т.е. решение системы сеточных уравнений, требовала минимума арифметических операций и машинной памяти.

При выбранном методе решения системы сеточных уравнений количество арифметических операций (объем вычислений) тем меньше, чем ниже порядок системы, т.е. чем крупнее шаг сетки. Однако уменьшение порядка системы (увеличение шага) приводит к уменьшению точности схемы. Поэтому желательно иметь схему с достаточно высоким порядком точности (такие схемы называют схемами *повышенной точности*), которая даже на крупной сетке давала приемлемую точность. С этой точки зрения наилучшими являются схемы *максимальной точности* (компактные схемы), имеющие максимально возможную точность на заданном шаблоне. Более подробно о методах повышения точности разностных схем изложено в [9.16].

Вместе с тем вычислительная эффективность метода решения системы сеточных уравнений существенно зависит от числа неизвестных, входящих в каждое уравнение системы, т.е. от шаблона разностной схемы, и тем выше, чем меньше шаблон. С этой точки зрения при построения разностной схемы для конкретной задачи математической физики следует выбирать минимально возможный шаблон. Таким шаблоном для задачи (1.28), например, является трехточечный шаблон. Построенная на этом шаблоне разностная схема (1.29) представляет собой систему уравнений с трехдиагональной матрицей, которая решается очень эффективным методом – методом прогонки, требующим $8N$ арифметических операций. Схемы такого типа, требующие

для своей реализации $O(N)$ арифметических операций, где N – число узлов сетки, называются *экономичными*. Для экономичных схем число операций, требуемое для вычисления сеточного решения в одном узле, не зависит от количества узлов. Примером экономичной схемы является, очевидно, схема (1.29). Схему (1.26) также можно считать экономичной, поскольку количество операций, приходящееся на вычисление решения в одном узле, не зависит в силу (1.27) от N .

В дальнейшем основное внимание будет уделяться построению экономических разностных схем максимальной точности. Для этого при аппроксимации конкретных краевых задач будут выбираться двухточечные или трехточечные (по пространственной переменной) шаблоны и на этих шаблонах затем будут строиться семейства экономичных разностных схем, зависящие от одного или двух параметров. Детальное изучение этих семейств с точки зрения их устойчивости и порядка точности позволит выделить среди них наилучшие схемы, т.е. экономичные схемы максимальной точности.

§3. Некоторые сведения о математическом аппарате теории разностных схем

В этом параграфе мы дадим краткое изложение математического аппарата теории разностных схем, который будет использоваться ниже при исследовании устойчивости разностных схем. Все рассуждения будут проводиться в пространствах $H_{N\pm 1}$, введенных в п.1 §1, либо в подпространстве $\overset{\circ}{H}_{N-1}$ пространства H_{N+1} (изометричном H_{N-1}), состоящем из функций вида $(0, v_1, v_2, \dots, v_{N-1}, 0)$ со скалярным произведением (1.6) и нормой (1.5).

Линейный оператор

$$A : \overset{\circ}{H}_{N-1} \rightarrow \overset{\circ}{H}_{N-1} \quad (3.1)$$

называется *самосопряженным* (симметричным) на $\overset{\circ}{H}_{N-1}$, если

$$(Av, w) = (v, Aw) \quad \forall v, w \in \overset{\circ}{H}_{N-1}, \quad (3.2)$$

неотрицательным (либо *кососимметричным*) на $\overset{\circ}{H}_{N-1}$, если

$$(Av, v) \geq 0 \quad (\text{либо } (Av, v) = 0) \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}_{N-1}$$

и *положительным* на $\overset{\circ}{H}_{N-1}$, если

$$(Av, v) > 0 \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}_{N-1}. \quad (3.3)$$

Известно [12, с.594], что каждый положительный самосопряженный оператор (3.1) порождает в \mathring{H}_{N-1} скалярное произведение и норму (эквивалентные исходным) по формулам

$$(v, w)_A = (Av, w), \quad \|v\|_A = (v, v)_A^{1/2}, \quad v, w \in \mathring{H}_{N-1}. \quad (3.4)$$

3.1. Формулы разностного дифференцирования произведения и суммирования по частям. Как известно из математического анализа, справедлива следующая формула дифференцирования произведения

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \quad (3.5)$$

Так как существует несколько типов разностных производных, то формула (3.5) имеет несколько разностных аналогов, например [12, с.98]:

$$(vw)_x(x) = v_x(x)w(x+h) + v(x)w_x(x). \quad (3.6)$$

Докажем (3.6). Пусть x_i произвольный узел сетки (1.1). Имеем

$$(vw)_x(x_i) = \frac{v_{i+1}w_{i+1} - v_iw_i \pm v_iw_{i+1}}{h} = v_x(x_i)w_{i+1} + v_iw_x(x_i).$$

Из анализа известна следующая формула интегрирования по частям

$$\int_0^l uv'dx = uv|_0^l - \int_0^l u'vdx \quad \forall u, v \in C^1[0, l]. \quad (3.7)$$

Для сеточных функций v и w имеют место следующие аналоги формулы (3.7)

$$(v, w_x) = v_Nw_N - v_0w_1 - (v_{\bar{x}}, w); \quad (3.8)$$

$$(v, w_{\bar{x}}) = v_Nw_{N-1} - v_0w_0 - [v_x, w]. \quad (3.9)$$

Здесь в дополнение к (1.6) используются обозначения

$$(v, w) = \sum_{i=1}^N v_iw_ih, \quad [v, w] = \sum_{i=0}^{N-1} v_iw_ih, \quad \|v\| = (v, v)^{1/2}, \quad \|[v]\| = [v, v]^{1/2}. \quad (3.10)$$

Докажем, например, (3.8). Используя формулу (3.6) в индексном виде, имеем

$$\sum_{i=1}^{N-1} (vw)_x(x_i) = \sum_{i=1}^{N-1} v_x(x_i)w_{i+1} + \sum_{i=1}^{N-1} v_iw_x(x_i) = \sum_{i=2}^N v_{\bar{x}}(x_i)w_i + \sum_{i=1}^{N-1} v_iw_x(x_i). \quad (3.11)$$

Используя (3.11) и равенство $v_{\bar{x}}(x_1)w_1h = v_1w_1 - v_0w_1$, получаем

$$\begin{aligned} (v, w_x) &\equiv \sum_{i=1}^{N-1} v_iw_x(x_i)h = \sum_{i=1}^{N-1} (vw)_x(x_i)h - \sum_{i=2}^N v_{\bar{x}}(x_i)w_ih = \\ &= v_Nw_N - v_1w_1 - \sum_{i=1}^{N-1} v_{\bar{x}}(x_i)w_ih + v_{\bar{x}}(x_1)w_1h = v_Nw_N - v_0w_1 - (v_{\bar{x}}, w). \end{aligned}$$

3.2. Разностные формулы Грина. Формулы

$$\int_0^l uv'' dx = - \int_0^l u'v' dx + uv' \Big|_0^l \quad \forall u \in C^1[0, l], \quad v \in C^2[0, l], \quad (3.12)$$

$$\int_0^l uv'' dx - \int_0^l u''v dx = (uv' - u'v) \Big|_0^l \quad \forall u, v \in C^2[0, l] \quad (3.13)$$

называются соответственно первой и второй *формулами Грина*. Сеточные аналоги формулы Грина легко получаются с помощью (3.8), (3.9). Действительно, заменяя в (3.8) w на $w_{\bar{x}}$ и учитывая, что $w_{\bar{x}}(x_1) = w_x(0)$, приходим к первой разностной формуле Грина:

$$(v, w_{\bar{x}x}) = -(v_{\bar{x}}, w_{\bar{x}}] + v_N(w_{\bar{x}})_N - v_0(w_x)_0. \quad (3.14)$$

Если, в частности, $v_0 = v_N = 0$, то (3.14) принимает вид

$$(v, w_{\bar{x}x}) = -(v_{\bar{x}}, w_{\bar{x}}] \quad \forall v \in \mathring{H}_{N-1}, \quad w \in H_{N+1} \quad (3.15)$$

Наконец, при $v = w$ из (3.15) имеем

$$(v_{\bar{x}x}, v) = -(v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}}] = \sum_{i=1}^N (v_{\bar{x}})_i^2 h = -\|v_{\bar{x}}\|^2 \quad \forall v \in \mathring{H}_{N-1}. \quad (3.16)$$

Заменим далее в (3.14) v на w , w на v . Получим

$$(w, v_{\bar{x}x}) = -(w_{\bar{x}}, v_{\bar{x}}] + w_N(v_{\bar{x}})_N - w_0(v_x)_0. \quad (3.17)$$

Вычитая (3.17) из (3.14), приходим ко второй формуле Грина

$$(v, w_{\bar{x}x}) - (w, v_{\bar{x}x}) = (vw_{\bar{x}} - wv_{\bar{x}})_N - (vw_{\bar{x}} - wv_x)_0. \quad (3.18)$$

Если, в частности, $v_0 = w_0 = v_N = w_N = 0$, то (3.18) принимает вид

$$(v, w_{\bar{x}x}) = (w, v_{\bar{x}x}) \quad \forall v, w \in \mathring{H}_{N-1}. \quad (3.19)$$

Формулы (3.16) и (3.19) означают, что оператор

$$\Lambda_h : \mathring{H}_{N-1} \rightarrow \mathring{H}_{N-1}, \quad (\Lambda_h v)_i = -v_{\bar{x}x}(x)_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (\Lambda_h v)_0 = 0, \quad (\Lambda_h v)_N = 0 \quad (3.20)$$

является положительным и самосопряженным.

В заключение приведем две важные теоремы, являющиеся разностными аналогами простейших теорем вложения Соболева.

ТЕОРЕМА 1. В случае равномерной сетки (1.1) для каждой функции $v \in \mathring{H}_{N-1}$ справедливы неравенства

$$\|v\|_{C(\bar{\omega})} \equiv \max_{x \in \bar{\omega}} |v(x)| \leq \frac{\sqrt{l}}{2} \|v_{\bar{x}}\|, \quad (3.21)$$

$$\frac{h}{2} \|v_{\bar{x}}\| \leq \|v\| \leq \frac{l}{\sqrt{8}} \|v_{\bar{x}}\|. \quad (3.22)$$

Рассмотрим далее прямоугольник $\Omega = (0 < x < l_1, 0 < y < l_2)$ и пусть

$$\bar{\omega} = \{(x_i, y_j) : x_i = ih_1, y_j = jh_2, i = 0, 1, \dots, N_1, j = 0, 1, \dots, N_2, h_1 = l_1/N_1, h_2 = l_2/N_2\} \quad (3.23)$$

равномерная сетка на Ω (см. рис. 1б). Обозначим через \mathring{H}_N пространство двумерных сеточных функций на $\bar{\omega}$, равных нулю на границе $\partial\bar{\omega}$, размерности

$N = (N_1 - 1)(N_2 - 1)$, со скалярным произведением и нормой

$$((v, w)) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} v_{ij} w_{ij} h_1 h_2, \quad \|v\| = ((v, v))^{1/2} \quad \forall v, w \in \mathring{H}_N. \quad (3.24)$$

Положим также

$$\|\nabla v\|^2 = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2} v_x^2(x_i, y_j) h_1 h_2 + \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} v_y^2(x_i, y_j) h_1 h_2. \quad (3.25)$$

Из теоремы 1 легко вытекает

ТЕОРЕМА 2. (Неравенство Фридрикса). В случае двумерной равномерной сетки (3.23) для каждой функции $v \in \mathring{H}_N$ справедливо неравенство

$$\|v\|^2 \leq C^2 \|\nabla v\|^2, \quad C^2 = \frac{l^1 l_2^2}{8(l_1^2 + l_2^2)}. \quad (3.26)$$

3.3. Сеточная задача на собственные значения. Решение дифференциальных уравнений методом Фурье приводит к необходимости решения так называемой задачи на *собственные значения*. В простейшем случае данная задача, называемая также задачей *Штурма-Лиувилля*, заключается в нахождении таких значений параметра $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых однородная краевая задача

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad x \in (0, l), \quad u(0) = u(l) = 0 \quad (3.27)$$

имеет нетривиальные решения. Указанные значения λ называются *собственными значениями* (с.з.), а отвечающие им нетривиальные решения – *собственными функциями* (с.ф.) задачи (3.27).

В теории разностных схем важную роль играет сеточный аналог задачи (3.27), который заключается в нахождении с.з. и с.ф. задачи

$$v_{\bar{x}x}(x) + \lambda v(x) = 0, \quad x \in \omega^h, \quad v_0 = v_N = 0 \quad (v \in \overset{\circ}{H}_{N-1}). \quad (3.28)$$

Сетку $\bar{\omega}^h$ для простоты предполагаем равномерной. С.з. и с.ф. задачи (3.28) находятся без труда, если с учетом аналогии задач (3.27) и (3.28) искать нетривиальное решение задачи (3.28) в виде $v(x) = \sin \alpha x$, где $x \in \bar{\omega}^h$, а α выбирается из того условия, чтобы $v \in \overset{\circ}{H}_{N-1}$. При этом оказывается, что основные свойства с.з. и с.ф. задач (3.27) и (3.28) во многом аналогичны. Перечислим их.

Задача (3.27)

Задача (3.28)

1. С.з. и с.ф. задачи (3.27) [(3.28)] существуют и имеют вид

$$\lambda_k = (k\pi/l)^2, \quad \lambda_k < \lambda_{k+1}, \quad \lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{2l}, \quad \lambda_k < \lambda_{k+1},$$

$$u_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad k = 1, 2, \dots; \quad w_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

2. С.ф. ортогональны. Точнее

$$\int_0^l u_k u_j dx = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ l/2, & k = j, \end{cases} \quad (w_k, w_j) = \sum_{i=1}^{N-1} w_k(x_i) w_j(x_i) h = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ l/2, & k = j. \end{cases}$$

3. Любую функцию $u \in L^2(0, l)$ (соответственно $v \in \overset{\circ}{H}_{N-1}$) можно разложить в ряд Фурье по с.ф.:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k u_k(x), \quad x \in (0, l), \quad v(x) = \sum_{k=1}^{N-1} q_k w_k(x), \quad x \in \omega, \quad (3.29)$$

где

$$C_k = \frac{2}{l} \int_0^l u u_k dx, \quad i = 1, 2, \dots; \quad q_k = \frac{2}{l} (v, w_k) = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{N-1} v_i w_k(x_i) h. \quad (3.30)$$

При этом справедливо равенство Парсеваля

$$\|u\|^2 = \int_0^l u^2(x) dx = \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2, \quad \|v\|^2 = \sum_{i=1}^{N-1} v_i^2 h = \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{N-1} q_k^2. \quad (3.31)$$

Аналогичным образом формулируется сеточная задача Штурма-Лиувилля для разностного оператора Лапласа в двумерной области. В простейшем случае задачи Дирихле в прямоугольнике она заключается в нахождении с.з. и с.ф. задачи

$$v_{\bar{x}x}(x, y) + v_{\bar{y}y}(x, y) + \lambda v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \omega, \quad v/\partial\omega = 0. \quad (3.32)$$

Можно показать, применяя метод разделения переменных [14, 185], что искомые с.з. и с.ф. определяются формулами

$$\lambda_{kj} = \lambda_k^{(1)} + \lambda_j^{(2)}, \quad w_{kj}(x, y) = w_k^{(1)}(x)w_j^{(2)}(y). \quad (3.33)$$

Здесь $\lambda_k^{(1)}, w_k^{(1)}$ (либо $\lambda_j^{(1)}, w_j^{(1)}$) с.з. и с.ф. соответствующей одномерной задачи Штурма-Лиувилля по оси x (либо y).

3.4. Сеточное преобразование Фурье. Рассмотрим наряду с пространством \mathring{H}_{N-1} сеточных функций, заданных на равномерной сетке ω^h $N - 1$ – мерное пространство \mathring{H}_{N-1} состоящее из N – периодических нечетных сеточных функций, заданных на множестве всех целых чисел (целой сетке) Z , равных нулю при $k = 0$ и $k = N$ со скалярным произведением и нормой

$$\langle p, q \rangle = \sum_{k=1}^{N-1} p(k)q(k), \quad \|q\|^2 = \langle q, q \rangle, \quad p, q \in \mathring{H}_{N-1}. \quad (3.34)$$

Легко проверить, что сеточные функции $w_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}$, рассматриваемые как функции от $k \in Z$ (при фиксированном x), образуют ортогональный базис в \mathring{H}_{N-1} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $\hat{v} : Z \rightarrow R$, действующая по формуле

$$\hat{v}(k) = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{N-1} v_i w_k(x) \quad (3.35)$$

называется сеточным синус-преобразованием Фурье функции $v \in H_{N-1}$.

Из (3.35) вытекает, что $\hat{v} \in \mathring{H}_{N-1}$. Таким образом, формула (3.35) определяет линейный оператор

$$F : \mathring{H}_{N-1} \rightarrow \mathring{H}_{N-1}, \quad F(v) = \hat{v} \quad \forall v \in H_{N-1}.$$

Свойства F описываются следующей легко доказываемой теоремой.

ТЕОРЕМА 3. Оператор F сюръективен и обратим. При этом обратный оператор F^{-1} определяется формулой

$$F^{-1}(\hat{v})[x_i] = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{v}(k)w_k(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1$$

и справедливо равенство Парсеваля

$$\sum_{i=1}^{N-1} v_i^2 h = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} [\hat{v}(k)]^2.$$

СЛЕДСТВИЕ. Коэффициенты Фурье любой функции $v \in \mathring{H}_{N-1}$ определяемые формулой (3.30), образуют ее сеточное преобразование Фурье.

Глава 3. Разностные схемы для уравнений 1-го порядка

В §§4–7 мы исследуем два семейства разностных схем для уравнения переноса, построенных на основе интегро-интерполяционного метода. Основное внимание при этом будем обращать на следующие свойства разностных схем: точность (аппроксимацию и устойчивость), экономичность (простоту в реализации на ЭВМ), однородность, монотонность, консервативность (дивергентность) и диссипативность. Исследование указанных свойств позволит в результате выделить наилучшую (оптимальную в определенном смысле) схему для каждого из этих свойств. Первый параграф является вспомогательным и служит для пояснения сущности интегро-интерполяционного метода.

§4. Обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка

4.1. Суть интегро-интерполяционного метода. Двухточечные разностные схемы. Пусть требуется найти методом сеток приближенное решение простейшей задачи Коши

$$Lu = u'(x) = f(x), \quad x \in (0, l), \quad (4.1)$$

$$u(0) = g_1. \quad (4.2)$$

С этой целью введем на интервале $[0, l]$ неравномерную в общем случае разностную сетку

$$\overline{\omega^h} = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad h = l/N\}, \quad \omega^h = \overline{\omega^h}/\{0, l\} \quad (4.3)$$

и проинтегрируем выражение $Lv - f$ на участке (x_{i-1}, x_i) , $i = 1, 2, \dots, N$. Получим

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (Lv - f)dx = v_i - v_{i-1} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx. \quad (4.4)$$

Введем следующие часто используемые в дальнейшем функции

$$s(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \neq 1/2, \\ 2, & \sigma = 1/2, \end{cases} \quad p(\alpha) = \begin{cases} 2, & \alpha \neq 1/6, \\ 4, & \alpha = 1/6. \end{cases} \quad (4.5)$$

Из теории численного интегрирования [4] вытекает.

ЛЕММА 1. Справедлива квадратурная формула:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(x)dx = \varphi_{i-1+\sigma} h_i + O(h^{s(\sigma)+1}), \quad \varphi \in C^s[x_{i-1}, x_i], \quad (4.6)$$

где

$$\varphi_{i-1+\sigma} = (1 - \sigma)\varphi_{i-1} + \sigma\varphi_i.$$

Используя (4.6), перепишем (4.4) в виде

$$\frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} - f_{i-1+\sigma} = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (Lv - f)dx + O(h^{s(\sigma)}). \quad (4.7)$$

Приравнивая левую часть (4.7) к нулю, приходим к следующей разностной схеме, аппроксимирующей уравнение (4.1)

$$\frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} = f_{i-1+\sigma} \equiv (1 - \sigma)f_{i-1} + \sigma f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.8)$$

Фактически (4.8) представляет собой семейство двухточечных разностных схем, зависящих от параметра σ , который мы будем считать изменяющимся на интервале $[0,1]$. Указанные схемы являются *однородными* (в том смысле, что имеют один и тот же вид в каждом узле сетки). Поскольку $Lu - f = 0$ на решении u , то из (4.7) вытекает

ТЕОРЕМА 1. *Разностная схема (4.8) имеет локальный порядок аппроксимации $O(h^s)$ на решении $u \in C^{s+1}[x_{i-1}, x_i]$.*

Изложенный способ построения разностной схемы для уравнения (4.1) называется интегро-интерполяционным методом (ИИМ). Его сущность заключается, таким образом, в том, чтобы проинтегрировать выражение вида $Lv - f$ на элементарном интервале и применить какую-либо квадратурную формулу. При $\sigma = 0$ (4.8) переходит в схему (1.26), построенную в §1 главы второй методом разностного дифференцирования. Сравнивая оба метода, замечаем, что в отличие от последнего метода ИИМ позволяет не только построить разностную схему, но и одновременно определить ее порядок аппроксимации. Подчеркнем так же, что порядок аппроксимации разностной схемы (4.8) на единицу меньше порядка точности соответствующей квадратурной формулы. Как будет видно дальше, это свойство является характерным для разностных схем, полученных на основе ИИМ.

Аппроксимируя граничное условие (4.2) абсолютно точно:

$$v^h(x_0) \equiv v_0 = g, \quad (4.9)$$

определим глобальный порядок аппроксимации построенной разностной схемы (4.8), (4.9). Полагая

$$U = C[0, l], \quad U_h = C[\overline{\omega^h}], \quad F = L^2(0, l), \quad F_h = L^2(\omega^h), \quad G = G_h = \mathbb{R}, \quad (4.10)$$

$$\|v^h\|_{U_h} = \max_{0 \leq i \leq N} |v^h(x_i)|, \quad \|f^h\|_{F_h}^2 = \sum_{i=1}^N (f_i^h)^2 h_i, \quad (4.11)$$

$$L_h v^h = v_{\bar{x}}^h, \quad f_i^h = f_{i-1+\sigma}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

запишем схему (4.8), (4.9) в формальном виде

$$L_h v^h = f^h, \quad v^h \in U_h, \quad f^h \in F_h, \quad v^h(x_0) = u_0 \in G_h. \quad (4.12)$$

Для определения порядка аппроксимации введем невязки

$$\delta f^h = u_{\bar{x}}^h - f^h, \quad (\delta f^h)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} - f_i^h, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad \delta g^h = u_0 - u_0 = 0, \quad (4.13)$$

где u^h – проекция точного решения u на сетку (4.3). В силу теоремы 1 имеем

$$|(\delta f^h)_i| \leq Ch^s \implies \|\delta f^h\|_{F_h} \leq Ch^s \implies \|\delta f^h\|_{F_h} = O(h^s).$$

Здесь и в дальнейшем C обозначает постоянные, не зависящие от h . В результате приходим к выводу, что глобальный порядок аппроксимации схемы (4.8), (4.9) совпадает с ее локальным порядком. Указанный факт является следствием однородности схемы (4.8) и абсолютно точной аппроксимации граничного условия (4.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае нелинейного уравнения

$$u'(x) = f(x, u) \quad (4.14)$$

аналогом (4.8) является семейство разностных схем

$$\frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} = (1 - \sigma)f(x_{i-1}, v_{i-1}) + \sigma f(x_i, v_i), \quad (4.15)$$

которое также имеет порядок $O(h^s)$ на решении $u \in C^{s+1}$. Наиболее распространенной в (4.15) является схема порядка $O(h)$, отвечающая случаю $\sigma = 0$ и называемая *методом Эйлера* [4, с.450]. Другие схемы в (4.15) практически не используются из-за трудностей в их численной реализации, поскольку при $\sigma > 0$ (4.15) представляет собой *неявное* (нелинейное) уравнение относительно v_i ввиду нелинейной зависимости f от v_i . Однако на основе (4.15) можно построить другие неявные методы, причем имеющие порядок $O(h^2)$: метод Эйлера с пересчетом, метод предиктор–корректор, методы Рунге–Кутты и т.д. Детальное изложение последних методов выходит за рамки этого пособия.

4.2. Трехточечные разностные схемы. Построим схему более высокого порядка для уравнения (4.1). Для этого в силу свойств ИИМ интеграл в (4.4) следует аппроксимировать квадратурной формулой более высокого порядка точности.

ЛЕММА 2. При любом $\alpha \in \mathbb{R}$ справедлива квадратурная формула:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(x) dx = [\alpha \varphi_{i-1} + (1 - 2\alpha) \varphi_i + \alpha \varphi_{i+1}] h_i + O(h^{p(\alpha)+1}), \quad \varphi \in C^p[x_{i-1}, x_i]. \quad (4.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\alpha = 1/6$ утверждение леммы в силу (4.5) очевидно, поскольку формула (4.16) переходит в формулу Симпсона [4, с.100]. Для доказательства леммы при $\alpha \neq 1/6$ достаточно умножить формулу трапеций

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(x)dx = \frac{1}{2}(\varphi_{i-1} + \varphi_i)h_i + O(h^3), \quad \varphi \in C^2[x_{i-1}, x_i], \quad \varphi_{i-1/2} = \varphi(x_{i-1/2}) \quad (4.17)$$

на 2α , формулу средних прямоугольников

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(x)dx = \varphi_{i-1/2}h_i + O(h^3), \quad \varphi \in C^2[x_{i-1}, x_i], \quad (4.18)$$

на $1 - 2\alpha$ и сложить полученные соотношения.

Применяя формулу (4.16), перепишем (4.4) в виде

$$\frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} - [\alpha f_{i-1} + (1 - 2\alpha)f_{i-1/2} + \alpha f_i] = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (Lv - f)dx + O(h^{p(\alpha)}). \quad (4.19)$$

Приравнявая левую часть (4.19) к нулю, приходим к семейству трехточечных разностных схем, аппроксимирующих уравнение (4.1)

$$\frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} = \alpha f_{i-1} + (1 - 2\alpha)f_{i-1/2} + \alpha f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.20)$$

Поскольку $Lu - f = 0$ на решении u , то из (4.19) вытекает:

ТЕОРЕМА 2. Разностная схема (4.20) имеет локальный порядок аппроксимации $O(h^p)$ на решении $u \in C^{p+1}[x_{i-1}, x_i]$.

Следует отметить, что иногда бывает неудобным рассматривать полуцелые узлы. В таких случаях для построения трехточечных схем приходится выбирать узлы x_{i-1}, x_i, x_{i+1} . Предполагая для простоты сетку (4.3) равномерной с шагом $h = l/N$, аналоги формулы (4.16) и схемы (4.20) тогда можно записать в виде

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi(x)dx = (A_\alpha \varphi)_i 2h + O(h^{p(\alpha)+1}), \quad \varphi \in C^{p(\alpha)}[x_{i-1}, x_{i+1}], \quad (4.21)$$

$$\frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} = (A_\alpha f)_i, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (4.22)$$

где оператор A_α определяется формулой

$$(A_\alpha f)_i = \alpha f_{i-1} + (1 - 2\alpha)f_i + \alpha f_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (4.23)$$

В отличие от (4.8), (4.9) схема (4.22), (4.9) представляет собой незамкнутую систему, поскольку она содержит N уравнений для $N + 1$ неизвестных (v_0, v_1, \dots, v_N) .

Если приписать i -тое уравнение в (4.22) к i -му узлу, то отчетливо видно, что в (4.22) не хватает одного уравнения для узла x_N . Следовательно, для замыкания системы (4.22), (4.9) достаточно добавить еще одно уравнение, отвечающее N -му узлу, в качестве которого можно взять, например, уравнение (4.8) при $i = N$

$$\frac{v_N - v_{N-1}}{h_N} = f_{N-1+\sigma}. \quad (4.24)$$

В результате мы получим *замкнутую* схему, аппроксимирующую задачу (4.1), (4.2). Поскольку полученная таким способом схема имеет разное строение во внутренних и граничном узлах, т.е. является неоднородной, то представляет интерес определить ее глобальный порядок аппроксимации. С этой целью формализуем схему (4.22), (4.24), (4.9), используя прежние обозначения (4.10), (4.11) и полагая в данном случае

$$(L_h v^h)_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (L_h v^h)_N = \frac{v_N - v_{N-1}}{h},$$

$$(f^h)_i = \alpha f_{i-1} + (1 - 2\alpha)f_i + \alpha f_{i+1}, \quad (f^h)_N = f_{N-1+\sigma}.$$

Из приведенных результатов следует, что

$$|(\delta f^h)_i| \leq Ch^{p(\alpha)}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad |(\delta f^h)_N| \leq Ch^{s(\sigma)}.$$

Следовательно,

$$\|\delta f^h\|_{F_h}^2 \leq C^2 [(l-h)h^{2p(\alpha)} + h^{2s(\sigma)+1}].$$

В зависимости от значений α и σ имеем

- 1) $\alpha \neq 1/6, \sigma \neq 1/2 \implies \|\delta f^h\|_{F_h} = O(h^{3/2}),$ 2) $\alpha = 1/6, \sigma \neq 1/2 \implies \|\delta f^h\|_{F_h} = O(h^{3/2}),$
3) $\alpha \neq 1/6, \sigma = 1/2 \implies \|\delta f^h\|_{F_h} = O(h^2),$ 4) $\alpha = 1/6, \sigma = 1/2 \implies \|\delta f^h\|_{F_h} = O(h^{5/2}).$

Анализ случаев (1)–(4) показывает, что глобальный порядок аппроксимации схемы (4.22), (4.24), (4.9) либо равен порядку уравнения (4.24), либо отличается от него на величину $1/2$. Особенно интересен случай 2), когда рассматриваемая схема имеет порядок $O(h^4)$ в каждом внутреннем узле и $O(h)$ – граничном узле x_N , а ее глобальный порядок равен $O(h^{3/2})$. Становится ясно, что с точки зрения аппроксимации (а следовательно и точности) бессмысленно строить разностные схемы, имеющие высокий локальный порядок аппроксимации в одной группе узлов сетки и низкий порядок – в другой. В этом отношении предпочтение следует отдавать однородным разностным схемам, либо, быть может, неоднородным, но имеющим одинаковый локальный порядок аппроксимации в каждом узле.

§5. Разностные схемы для законов сохранения

В этом параграфе, основанном на результатах [1], мы докажем важную теорему о порядке аппроксимации разностных схем для уравнений в частных производных 1-го порядка, построенных на основе ИИМ.

Пусть $Q = (0 < x < l, 0 < t < T)$. Рассмотрим в Q нелинейное в общем случае дифференциальное уравнение, записанное в форме *закона сохранения* (или имеющее, как говорят, *дивергентный* вид)

$$Lu \equiv \frac{\partial \Phi(u, x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \Psi(u, x, t)}{\partial x} = F(u, x, t). \quad (5.1)$$

Здесь Φ , Ψ и F – достаточно гладкие функции своих аргументов (например, $\Phi, \Psi, F \in C^r$, $r \geq 2$). Введем в области Q неравномерную разностную сетку

$$\bar{\omega}^{h\tau} = \bar{\omega}^h \times \bar{\omega}^\tau = \{(x_i, t_n) : i = 0, 1, \dots, N; n = 0, 1, \dots, M\} \quad (5.2)$$

и положим

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \dots, N; \quad \tau_n = t_n - t_{n-1}, \quad n = 1, \dots, M; \quad h = \max_{1 \leq i \leq N} h_i; \quad \tau = \max_{1 \leq n \leq M} \tau_n \quad (5.3)$$

Назовем элементарным участком любую подобласть $Q_{i,j}^{m,n} \equiv (x_i < x < x_j, t_m < t < t_n)$ области Q , для которой

$$x_j - x_i = O(h), \quad t_n - t_m = O(\tau). \quad (5.4)$$

Для построения разностной схемы, аппроксимирующей уравнение (5.1), проинтегрируем, следуя ИИМ, выражение $Lv - F$ по элементарному участку $Q_{i,j}^{m,n}$. Получим

$$\int_{x_i}^{x_j} \int_{t_m}^{t_n} (Lv - F) dx dt = \int_{x_i}^{x_j} (\Phi^n - \Phi^m) dx + \int_{t_m}^{t_n} (\Psi_j - \Psi_i) dt - \int_{x_i}^{x_j} \int_{t_m}^{t_n} F dx dt, \quad (5.5)$$

где $\Phi^n = \Phi|_{t=t_n}$, $\Psi_i = \Psi|_{x=x_i}$ и т.д. Предполагая, что $u \in C^r(\bar{Q})$, аппроксимируем интегралы в правой части (5.5) интегральными суммами с помощью интерполяционных квадратурных формул, имеющих точность $O(h^p)$ по x и $O(\tau^q)$ по t ($p, q \leq r$), где числа p и q зависят соответственно от $j - i$ и $n - m$. Учитывая, что в силу (5.4)

$$\frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}} (\Phi^n - \Phi^m) = O(\tau), \quad \frac{\partial^{q-1}}{\partial t^{q-1}} (\Psi_j - \Psi_i) = O(h),$$

соответствующие формулы можно записать в виде

$$\int_{x_i}^{x_j} (\Phi^n - \Phi^m) dx = \sum_{k=i}^j \alpha_k (\Phi_k^n - \Phi_k^m) (x_j - x_i) + O(\tau)O(h^p), \quad (5.6)$$

$$\int_{t_m}^{t_n} (\Psi_j - \Psi_i) dt = \sum_{l=m}^n \beta_l (\Psi_j^l - \Psi_i^l) (t_n - t_m) + O(h)O(\tau^q), \quad (5.7)$$

где $\alpha_k, k = i, i + 1, \dots, j$; $\beta_l, l = m, m + 1, \dots, n$ – коэффициенты соответствующих квадратурных формул. Для аппроксимации кратного интеграла в правой части (5.5) применим кубатурную формулу, основанную на последовательном применении квадратурных формул (5.6), (5.7)

$$\int_{x_i}^{x_j} \int_{t_m}^{t_n} F dx dt = \sum_{k=i}^j \sum_{l=m}^n \alpha_k \beta_l F_k^l (x_j - x_i) (t_n - t_m) + O(\tau)O(h^p) + O(h)O(\tau^q). \quad (5.8)$$

Подставим (5.6)–(5.8) в (5.5) и разделим на $(x_j - x_i)(t_n - t_m)$ обозначим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t_n - t_m} \sum_{k=i}^j \alpha_k (\Phi_k^n - \Phi_k^m) + \frac{1}{x_j - x_i} \sum_{l=m}^n \beta_l (\Psi_j^l - \Psi_i^l) - \sum_{k=i}^j \sum_{l=m}^n \alpha_k \beta_l F_k^l = \\ & = \frac{1}{(x_j - x_i)(t_n - t_m)} \int_{x_i}^{x_j} \int_{t_m}^{t_n} (Lv - F) dx dt + O(h^p) + O(\tau^q). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Приравнивая левую часть (5.9) к нулю, приходим к разностной сумме

$$\frac{1}{t_n - t_m} \sum_{k=i}^j \alpha_k (\Phi_k^n - \Phi_k^m) + \frac{1}{x_j - x_i} \sum_{l=m}^n \beta_l (\Psi_j^l - \Psi_i^l) - \sum_{k=i}^j \sum_{l=m}^n \alpha_k \beta_l F_k^l = 0. \quad (5.10)$$

Поскольку $Lu - F = 0$ на решении u , то из (5.9) вытекает:

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Phi, \Psi, F \in C^r, r \geq 2$. Тогда схема (5.10) имеет локальный порядок аппроксимации $O(h^{p-1} + \tau^{q-1})$ на решении $u \in C^r(\bar{Q})$.

Итак, как следует из теоремы 1, порядок аппроксимации схемы (5.10) по каждой переменной на единицу меньше порядка аппроксимации интегралов в (5.5) по соответствующей переменной. В справедливости этого факта для каждой конкретной разностной схемы можно убедиться и обычным образом, используя разложения решения и функций Φ, Ψ, F , по формуле Тейлора, однако последнее может потребовать проведения громоздких, хотя и элементарных выкладок. Таким образом, смысл теоремы 1 заключается в том, что она расширяет возможности ИИМ, позволяя с его помощью не только построить разностную схему, но и одновременно определить порядок ее аппроксимации.

Из теоремы 1 вытекает, что для построения разностных схем повышенной точности, в том числе и схем максимальной точности на западном шаблоне сетки, достаточно интегралы в (5.5) аппроксимировать при помощи квадратурных формул,

обладающих повышенной или максимальной точностью. Поэтому можно указать следующее применение теоремы 1. Сначала, основываясь на ее результатах, построить разностную схему, аппроксимирующую уравнение (5.1) с достаточно высоким порядком точности. А далее, в окрестности построенной схемы, выбрать разностную схему, обладающую наряду с высокими аппроксимативными свойствами и рядом других свойств, как-то: устойчивостью, экономичностью, консервативностью и т.д. В заключение отметим, что выводы теоремы 1 остаются справедливыми для дифференциальных законов сохранения и их систем в пространстве любого числа измерений.

§6. Двухслойные двухточечные разностные схемы для уравнения переноса

6.1. Постановка задачи. Свойства точного решения. Математическое моделирование физических процессов в сплошных средах применяют к рассмотрению сложных нелинейных систем дифференциальных уравнений в частных производных. Для их решения существует ряд численных методов, среди которых важное место занимает метод *расщепления по физическим процессам* [5, с.296]. Применение данного метода к задачам гидродинамики и термодинамики приводит к необходимости численного интегрирования дифференциального уравнения, описывающего перенос некоторой субстанции (например, температуры, плотности, солености, завихренности и т.д.) вдоль траекторий частиц движущейся жидкости. В простейшем одномерном случае указанное уравнение имеет вид

$$Lu = u_t + au_x = f \quad \text{в } Q = (0, l) \times (0, T). \quad (6.1)$$

Здесь u – переносимая субстанция, f – заданная функция от x и t , имеющая смысл плотности источников величины u , $a = \text{const}$ – скорость движущейся жидкости, которую не умаляя общности, будем считать положительной ($a > 0$). Указанное условие физически означает, что уравнение (6.1) описывает эволюцию, т.е. изменение со временем величины u в частицах (точках) жидкости, движущихся в положительном направлении оси x со скоростью a .

Наряду с уравнением (6.1), которое принято называть *уравнением переноса*, будем рассматривать более общее уравнение

$$Lu = u_t + au_x + qu = f \quad \text{в } Q, \quad (6.1a)$$

где q – заданная функция в Q . На указанное уравнение будем ссылаться как на *обобщенное уравнение переноса*. Каждое из уравнений (6.1) и (6.1a) будем рассматривать

при следующих начальных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad \text{в } (0, l), \quad (6.2)$$

$$u|_{x=0} = g(t) \quad \text{в } (0, T). \quad (6.3)$$

Здесь $\varphi(x)$ и $g(t)$ – заданные функции своих аргументов.

Предположим, что

$$f \in C^l(\overline{Q}), \quad \varphi \in C^l[0, l], \quad g \in C^l[0, T], \quad l \geq 1. \quad (6.4)$$

Из теории дифференциальных уравнений известно [6, с.62], что при выполнении (6.4) решение задачи (6.1)-(6.3) сводится к нахождению характеристик уравнения (6.1), т.е. решений $y(\tau, x, t)$ задачи

$$\frac{dy}{d\tau} = a, \quad y|_{\tau=t} = x, \quad (6.5)$$

где $(x, t) \in \overline{Q}$ – произвольная точка. По своему физическому смыслу характеристика описывает *траекторию*, т.е. положение в момент τ частицы, занимающей в момент t положение x . Поскольку $a = const$, то характеристики представляют собой однопараметрическое семейство прямых

$$y = x + a(\tau - t), \quad (6.6)$$

точнее их отрезков в \overline{Q} , причем через каждую точку $(x, t) \in \overline{Q}$ проходит одна и только одна характеристика. Указанная характеристика начинается, т.е. входит в Q в точке $x_0 = x - at$ в момент $t_0 = 0$ при $x \geq at$ и в точке $x_0 = 0$ в момент $t_0 = t - x/a$ при $x < at$ (рис. 4).

Положим

$$Q_1 = \{(x, t) \in Q : x > at\}, \quad Q_2 = \{(x, t) \in Q : x < at\},$$

$$u_1(x, t) = \varphi(x - at) + \int_0^t f[x + a(\tau - t), \tau] d\tau \quad \text{в } Q_1, \quad (6.7)$$

$$u_2(x, t) = g(t - x/a) + \int_{t-x/a}^t f[x + a(\tau - t), \tau] d\tau \quad \text{в } Q_2. \quad (6.8)$$

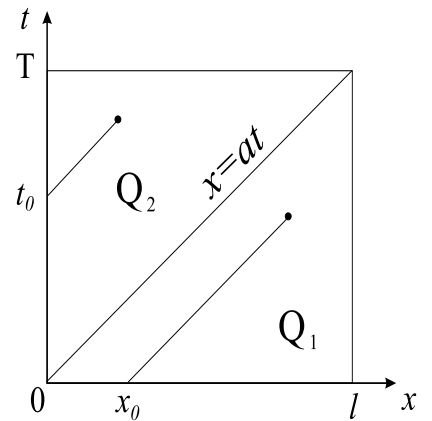


Рис. 4:

Нетрудно убедиться непосредственной проверкой, что при выполнении условий (6.4) $u_i \in C^l(\overline{Q}_i)$, $i = 1, 2$, причем функция u_1 удовлетворяет уравнению (6.1) в области Q_1 , и начальному условию (6.2), а u_2 – уравнению

(6.1) в Q_2 и граничному условию (6.3). Для построения решения во всей области Q , “склеим” функции u_1 и u_2 на прямой $x = at$, полагая

$$u(x, t) = u_1(x, t) \quad \text{в } Q_i, \quad i = 1, 2. \quad (6.9)$$

Из (6.9) следует, что так введенная функция u принадлежит классу $C^l(\overline{Q})$, $l \geq 1$ и является решением задачи (6.1)-(6.3) тогда и только тогда, когда функции u_1 и u_2 совпадают на прямой $x = at$ вместе со всеми производными до порядка l включительно. Для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы исходные данные задачи (6.1)-(6.3), т.е. функции f , φ и g удовлетворяли вместе со своими производными до порядка l включительно определенным *условиям согласования* в точке $(0, 0)$, которые в дальнейшем будут предполагаться выполненными. Простейшие из них имеют вид

$$\varphi(0) = g(0), \quad g'(0) + a\varphi'(0) = f(0, 0)$$

и служат для обеспечения соответственно непрерывности и непрерывной дифференцируемости решения u в \overline{Q} .

Из (6.7), (6.8), в частности, следует, что для решения u задачи (6.1)-(6.3) справедлива оценка

$$\|u\|_{C(\overline{Q})} \leq \max(\|\varphi\|_{C[0,l]}, \|g\|_{C[0,T]}) + T\|f\|_{C(\overline{Q})}. \quad (6.10)$$

При $f(x, t) = 0$ решение u , кроме того, сохраняется вдоль характеристик и удовлетворяет “чистому” принципу максимума

$$m \leq u(x, t) \leq M \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}, \quad (6.11)$$

где

$$m = \min(\min_{x \in [0,l]} \varphi(x), \min_{t \in [0,T]} g(t)), \quad M = \max(\max_{x \in [0,l]} \varphi(x), \max_{t \in [0,T]} g(t)).$$

Обратившись к оценке (6.10), заметим, что указанная оценка получена на основе явного представления решения в виде (6.7), (6.8). Оценки такого рода (полученные с использованием информации о решении), называются *апостериорными*. Роль этих оценок в общем-то невелика, так как найти явное представление точного решения удастся в редких случаях. Так, для обобщенного уравнения переноса (6.1a) или уравнения переноса при переменном коэффициенте a построение аналогичного представления решения становится проблематичным. Важно, однако, отметить, что оценки вида (6.10) можно получать и без использования информации о точном решении u , а с использованием лишь свойств самого дифференциального уравнения, которому удовлетворяет u . Причем, поскольку при этом совершенно не используется

явное представление решения, то с помощью такого подхода можно получать оценки как для уравнений с постоянными или переменными коэффициентами, так и для нелинейных дифференциальных уравнений. Поясним идею указанного подхода на примере более общей задачи (6.1a)-(6.3).

Введем гильбертово пространство функций $H = L^2(0, l)$ со скалярным произведением и нормой

$$(u, v) = \int_0^l u(x)v(x)dx, \quad \|u\| = \|u\|_H = (u, u)^{1/2} \quad (6.12)$$

и рассмотрим два пространства функций, зависящих от x и t :

$$U = C[0, T, H], \quad F = L^1(0, T, H) \quad (6.13)$$

с нормами

$$\|u\|_U = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_H, \quad \|f\|_F = \int_0^T \|f(\cdot, t)\|_H dt. \quad (6.14)$$

Предполагая, что решение u задачи (6.1a)-(6.3) существует и принадлежит классу $C^1(\bar{Q})$, умножим уравнение (6.1a) на u и проинтегрируем на интервале $(0, l)$. Учитывая, что

$$\int_0^l u_t u dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{d}{dt} u^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|^2,$$

получим

$$\frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|^2 + au^2(l, t) - ag^2(t) + 2 \int_0^l qu^2 dx = 2(f, u). \quad (6.15)$$

Предположим сначала, что $g(t) = 0$, $q(x, t) \geq 0$. Оставляя в левой части (6.15) первое слагаемое и применяя к правой части неравенство Коши, приходим к соотношению

$$\frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|^2 = 2\|u\| \frac{d}{dt} \|u\| \leq 2\|f\| \|u\|. \quad (6.16)$$

Сократив обе части (6.16) на $2\|u\|$, проинтегрируем полученное выражение на интервале $(0, t)$. Получим неравенство

$$\|u(\cdot, t)\| \leq \|\varphi\| + \int_0^t \|f(\cdot, \tau)\| d\tau \leq \|\varphi\| + \int_0^T \|f(\cdot, t)\| dt, \quad (6.17)$$

из которого вытекает в силу обозначений (6.14), что

$$\|u\|_U \leq \|\varphi\| + \|f\|_F. \quad (6.18)$$

Пусть теперь $f = 0, q \geq 0$. Интегрируя (6.15) на $(0, t)$, получим

$$\|u(\cdot, t)\|^2 = \|\varphi\|^2 + a \int_0^t g^2(\tau) d\tau - a \int_0^t u^2(l, \tau) d\tau - 2 \int_0^t \int_0^l qu^2 dx d\tau. \quad (6.19)$$

Поскольку последние два слагаемых в правой части (6.19) неположительны, то отбрасывая их, приходим к неравенству

$$\|u(\cdot, t)\|^2 \leq \|\varphi\|^2 + a \int_0^t g^2(\tau) d\tau \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6.20)$$

Из (6.17) и (6.20) вытекает в силу линейности задачи (6.1a)-(6.3) неравенство

$$\|u\|_U \leq \|\varphi\| + \|f\|_F + \sqrt{a} \left(\int_0^T g^2(t) dt \right)^{1/2} \quad (6.21)$$

обобщающее (6.18) на случай, когда $g(t) \neq 0$.

Неравенство (6.21) означает, что при $q \geq 0$ норма решения задачи (6.1a)-(6.3) ограничена сверху постоянной, равной сумме норм исходных данных φ, g и f .

Таким образом, (6.21) играет роль простейшей оценки на решение u сверху, причем указанная оценка получена не из представления решения, а исходя лишь из свойств самого уравнения (6.1) и предположения о существовании и непрерывной дифференцируемости решения. Оценки такого типа (устанавливающие соответствующую информацию о решении до его определения) называются *априорными*. В отличие от апостериорных оценок априорные оценки играют важную роль в теории дифференциальных уравнений и используются, например, для доказательства существования, единственности и устойчивости решений краевых задач. В частности, из оценки (6.21) вытекает в силу линейности задачи (6.1a)-(6.3) единственность решения u и устойчивость его в выбранных нормах. Метод исследования корректности краевых задач основанный на получении и использовании априорных оценок, называется методом *априорных оценок*. Его также называют методом *энергетических неравенств* или просто *энергетическим методом*. Последнее название связано с тем, что оцениваемая величина, и в частности $\|u\|^2$, обычно имеет смысл энергии рассматриваемой физической системы. Ниже термин “энергия” будет носить скорее математический характер, и обозначать величину $E(t) = \|u\|^2$, независимо от физического смысла последней.

Наряду с априорными оценками важную роль играют так называемые интегральные *законы сохранения*, устанавливающие некоторые интегральные свойства решений рассматриваемой задачи. Простейший из них для задачи (6.1a)-(6.3) имеет вид

(6.19) и означает при $g(t) = 0$, что энергия $E(t)$ убывает с ростом t (поскольку с ростом t убывают последние два слагаемых в правой части (6.19)). Это естественно с физической точки зрения, так как условия $f = 0$, $g = 0$ означают отсутствие притока энергии в рассматриваемую систему. Поскольку при этом частицы, выходящие из $(0, l)$ выносят с собой часть энергии, то энергия может только убывать. Последние два слагаемых в правой части (6.19) как раз и описывают теряемую энергию за время t . Отбрасывая их, мы получили ниже априорную оценку (6.20), являющуюся, таким образом, следствием закона сохранения.

При $q \equiv 0$ закон сохранения (6.19) принимает вид

$$\|u(\cdot, t)\|^2 = \|\varphi\|^2 + a \int_0^t g^2(\tau) d\tau - a \int_0^t u^2(l, \tau) d\tau. \quad (6.22)$$

Видно, что (6.22) связывает значения u на границах прямоугольника $Q_t = (0 < x < l, 0 < \tau < t)$. Это объясняется тем обстоятельством, что уравнение (6.1) имеет *дивергентный* вид (так как левая часть уравнения (6.1) представляет собой двумерную дивергенцию вектора (u, au)). Важно отметить при этом, что дивергентность уравнения (6.1) не нарушается, если обе части его умножить на u^{p-1} , где $p \geq 1$ в силу соотношения

$$(u_t + au_x)u^{p-1} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^p}{p} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{u^p}{p} \right). \quad (6.23)$$

Указанные обстоятельства приводят к тому, что после интегрирования уравнения $(u_t + au_x)u^{p-1} = 0$ по любой двумерной области \tilde{Q} мы можем применить к полученному интегралу формулу Гаусса-Остроградского и свести его к интегралу по границе $\partial\tilde{Q}$. В частности, при $\tilde{Q} = Q_t$ интеграл по ∂Q принимает вид

$$\int_0^l u^p(x, t) dx = \int_0^l \varphi^p(x) dx + a \int_0^t g^p(\tau) d\tau - a \int_0^t u^p(l, \tau) d\tau. \quad (6.24)$$

При четных p ($p^0 = 2n$) (6.24) имеет смысл закона сохранения неотрицательного функционала $\int_0^l u^{2n} dx$, переходящего при $n = 1$ в энергию E . Это означает, что задача (6.1a)-(6.3) допускает бесчисленное множество законов сохранения.

При построении разностных схем естественно потребовать, чтобы они сохраняли основные свойства решений дифференциальной задачи и, в частности, принцип максимума или законы сохранения. Разностные схемы, удовлетворяющие разностному аналогу принципа максимума, называются *монотонными*. Разностные схемы, сохраняющие на сетке законы сохранения, принято называть *консервативными* или *дивергентными*. Важно отметить, что монотонные или консервативные разностные

схемы, как правило, являются устойчивыми (по крайней мере для линейных задач), причем устойчивость этих схем доказывается точно так же, как на основе принципа максимума или закона сохранения вида (6.19) доказывается устойчивость точного решения.

Следует, однако, отметить, что понятие “консервативная (дивергентная) разностная схема” следует использовать с известной степенью осторожности. Действительно, как мы видели на примере задачи (6.1a)-(6.3), дифференциальная задача может допускать достаточно большое количество независимых законов сохранения и даже бесчисленное множество их. В то же время, поскольку разностная схема представляет собой конечномерную задачу, то от нее в принципе нельзя потребовать, чтобы она соблюдала все законы сохранения, справедливые для дифференциальной задачи. Достаточно потребовать, чтобы она сохраняла наиболее важные из них, скажем с физической точки зрения. Так, например, при построении разностных схем для задач газовой динамики достаточно потребовать, чтобы они выражали на сетке законы сохранения массы, импульса и энергии (как полной, так и отдельных ее видов - внутренней и кинетической энергией). Соответствующие разностные схемы принято называть *полностью консервативными* разностными схемами [12, с.433].

Что касается задачи (6.1a)-(6.3), то для наших целей достаточно потребовать, чтобы аппроксимирующие ее разностные схемы удовлетворяли разностному аналогу закона сохранения энергии (6.19). Это повлечет за собой априорную оценку сеточного решения, аналогичную оценке (6.21) (или (6.18) при $f \neq 0$), из которой автоматически будет вытекать устойчивость разностной схемы. На соответствующие разностные схемы будем в дальнейшем ссылаться как на консервативные разностные схемы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае, когда $a < 0$, для корректной постановки краевой задачи краевое условие для уравнения (6.1) следует задавать не на левом конце $x = 0$, как в (6.3), а на правом конце $x = l$. Это является следствием общего правила, согласно которому дополнительные условия для уравнения 1-го порядка, рассматриваемого в области Q , следует задавать в тех точках границы ∂Q , где характеристики, т.е. прямые $x = at + const$ в данном случае, входят в область Q . При $a = 0$ характеристики переходят в прямые $x = b$, направленные вверх. Поэтому краевые условия в этом случае снимаются, а (6.1), (6.2) представляет однопараметрическое семейство задач Коши для уравнения. Наконец, в случае, когда коэффициент a является знакопеременной функцией, краевые условия следует задавать в тех точках отрезка $x = 0$ (либо $x = l$) границы ∂Q , где $a(x, t) > 0$ (либо $a(x, t) < 0$).

6.2. Построение разностных схем. Для построения разностной схемы, аппроксимирующей уравнение (6.1a), введем, как и в §5, неравномерную разностную сетку

(5.2) и проинтегрируем выражение $Lv - f$ по элементарному участку

$$Q_{i-1,i}^{n,n+1} = (x_{i-1}, x_i) \times (t_n, t_{n+1}), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad n = 0, 1, \dots, M-1. \quad (6.25)$$

Получим

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (Lv - f) dx dt = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (v^{n+1} - v^n) dx + a \int_{t_n}^{t_{n+1}} (v_i - v_{i-1}) dt + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (gv - f) dx dt. \quad (6.26)$$

Аппроксимируя интегралы по x в правой части (6.26) с помощью квадратурной формулы (4.6), а интегралы по t с помощью формулы

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \psi(t) dt = \psi^{n+\theta} \tau_{n+1} + O(\tau^{s(\theta)+1}), \quad (6.27)$$

где $s(\theta)$ определяется из (4.5), причем

$$\varphi_{i-1+\sigma} = (1 - \sigma)\varphi_{i-1} + \sigma\varphi_i, \quad \psi^{n+\theta} = (1 - \theta)\psi^n + \theta\psi^{n+1}, \quad (6.28)$$

и рассуждая так же, как и в §5 при выводе схемы (5.10), приходим к двухпараметрическому семейству двухслойных разностных схем, зависящих от параметров $\sigma \in [0, 1]$ и $\theta \in [0, 1]$:

$$\frac{v_{i-1+\sigma}^{n+1} - v_{i-1+\sigma}^n}{\tau_{n+1}} + a \frac{v_i^{n+\theta} - v_{i-1}^{n+\theta}}{h_i} + (qv - f)_{i-1+\sigma}^{n+\theta} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad n = 0, \dots, M-1. \quad (6.29)$$

Здесь, в частности,

$$f_{i-1+\sigma}^{n+\theta} = (1 - \theta) [(1 - \sigma)f_{i-1}^n + \sigma f_i^n] + \theta [(1 - \sigma)f_{i-1}^{n+1} + \sigma f_i^{n+1}], \quad f_i^n = f(x_i, t_n). \quad (6.30)$$

Аналогичный смысл имеют $v_{i-1+\sigma}^{n+\theta}$ и $q_{i-1+\sigma}^{n+\theta}$, причем $v_i^n = v(x_i, t_n)$, $q_i^n = q(x_i, t_n)$, где (x_i, t_n) принадлежит сетке (5.2).

Из теоремы 1 §5 вытекает, что схема (6.29) имеет на решении $u \in C^3(Q_{i-1,i}^{n,n+1})$ локальный порядок

$$O(h^{s(\sigma)} + \tau^{s(\theta)}). \quad (6.31)$$

В этом можно (и полезно) убедиться и другим способом, используя, например, разложение решения u и функций g, f по формуле Тейлора. Важно отметить, что формула (6.31) вместе с формулой (4.5) определяет порядок аппроксимации разностной схемы (6.29) одновременно для всех значений параметров σ и θ . Наивысший порядок аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ (для шаблона $\omega_{i-1,i}^{n,n+1}$) схема (6.29) имеет при $\sigma = 1/2, \theta = 1/2$, чему отвечает аппроксимация интегралов в (6.26) при помощи двухточечной интерполяционной квадратурной формулы наивысшей точности – формулы трапеций.

Аппроксимируя далее начальные и краевые условия (6.2), (6.3) абсолютно точно соответствующими разностными условиями

$$v|_{t=0} \equiv v^0(x) = \varphi^h(x), \quad x \in \overline{\omega^h}, \quad (6.32)$$

$$v|_{x=0} \equiv v_0(t) = g^\tau(t), \quad t \in \overline{\omega^\tau}, \quad (6.33)$$

где

$$\varphi^h(x_i) = \varphi(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad g^\tau(t_n) = g(t_n), \quad n = 0, 1, \dots, M$$

и приписывая разностное уравнение (6.29) к узлу (x_i, t_{n+1}) , можно показать обычным образом, что глобальный порядок разностной схемы (6.29), (6.32), (6.33) (в соответствующим образом выбранных пространствах) совпадает с локальным порядком аппроксимации (6.31) на решении $u \in C^3(\overline{Q})$. Для краткости на указанную схему будем ссылаться в дальнейшем как на схему (1).

6.3. Реализация разностной схемы. Исследуем вопрос о реализации схемы (1) на ЭВМ. С этой целью перепишем (6.29) с учетом (6.30) в виде

$$\begin{aligned} & (\sigma + \theta C_i^{n+1} + \sigma \theta b_i^{n+1}) v_i^{n+1} + [1 - \sigma - \theta C_i^{n+1} + (1 - \sigma) \theta b_{i-1}^{n+1}] v_{i-1}^{n+1} = \tau_{n+1} f_{i-1+\sigma}^{n+\theta} + \\ & + [\sigma - (1 - \theta) C_i^{n+1} - \sigma(1 - \theta) b_i^n] v_i^n + [1 - \sigma + (1 - \theta) C_i^{n+1} - (1 - \sigma)(1 - \theta) b_{i-1}^n] v_{i-1}^n, \end{aligned} \quad (6.34)$$

где $C_i^{n+1} = a\tau_{n+1}/h_i$, $b_i^{n+1} = \tau^{n+1} q_i^{n+1}$, $b_i^n = \tau_{n+1} q_i^n$. Предполагая, что

$$\sigma + \theta C_i^{n+1} + \sigma \theta b_i^{n+1} \neq 0, \quad (6.35)$$

систему (6.34) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} v_i^{n+1} &= \frac{\theta C_i^{n+1} + (\sigma - 1)(1 + \theta b_{i-1}^{n+1})}{\theta C_i^{n+1} + \sigma(1 + \theta b_i^{n+1})} v_{i-1}^{n+1} + \frac{\sigma - (1 - \theta) C_i^{n+1} - \sigma(1 - \theta) b_i^n}{\theta C_i^{n+1} + \sigma(1 + \theta b_i^{n+1})} v_i^n + \\ & + \frac{1 - \sigma + (1 - \theta) C_i^{n+1} - (1 - \sigma)(1 - \theta) b_{i-1}^n}{\theta C_i^{n+1} + \sigma(1 + \theta b_i^{n+1})} v_{i-1}^n + \frac{\tau_{n+1} f_{i-1+\sigma}^{n+\theta}}{\theta C_i^{n+1} + \sigma(1 + \theta b_i^{n+1})}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Анализ формулы (6.36) показывает, что для нахождения значений решения в узлах $(n + 1)$ -го временного слоя достаточно знать значения решения в узлах n -го временного слоя и в левом граничном узле (x_0, t_{n+1}) . Следовательно, исходя из начального слоя $t = 0$, значения решения v_i^0 на котором известны из начального условия (6.32), и используя граничное условие (6.33), с помощью формулы (6.36), т.е. фактически с помощью схемы (6.29), мы можем последовательно вычислить значения сеточного решения во всех узлах разностной сетки. Схемы такого типа называются схемами бегущего счета, а соотношение (6.36) играет, таким образом, роль рекуррентной формулы, служащей для определения значений сеточного решения. Важно

отметить, что для нахождения с помощью формулы (6.36) значений v_i^{n+1} решения во всех узлах $(n+1)$ -го временного слоя требуется порядка CN арифметических операций с легко подсчитываемой константой C , (так, например, $C = 12$ при $\theta = \sigma = 1$). Таким образом, схема (1) является экономичной и допускает простую реализацию на ЭВМ.

6.4. Исследование устойчивости на основе принципа максимума. В этом пункте мы рассмотрим схему (1) в случае, когда

$$q(x, t) = 0 \quad f(x, t) = 0 \quad (6.37)$$

и укажем условия на σ, θ , при которых указанная схема является монотонной, т.е. удовлетворяет разностному аналогу принципа максимума (6.11), справедливого для точного решения u задачи (6.1)-(6.3) при выполнении условий (6.37).

Переписав соотношение (6.36) с учетом (6.37) в виде

$$v_i^{n+1} = \frac{\theta C_i^{n+1} + \sigma - 1}{\sigma + \theta C_i^{n+1}} v_{i-1}^{n+1} + \frac{\sigma - (1 - \theta) C_i^{n+1}}{\sigma + \theta C_i^{n+1}} v_i^n + \frac{1 - \sigma + (1 - \theta) C_i^{n+1}}{\sigma + \theta C_i^{n+1}} v_{i-1}^n \quad (6.38)$$

замечаем, что сумма коэффициентов при $v_{i-1}^{n+1}, v_i^n, v_{i-1}^n$ в правой части (6.38) равна единице. Это означает, что значение v_i^{n+1} является средним в некотором смысле значением чисел v_{i-1}^{n+1}, v_i^n и v_{i-1}^n . Коэффициент при v_{i-1}^n в (6.38) неотрицателен при любых σ и θ . Предположим, более того, что и остальные коэффициенты в (6.38) неотрицательны, т.е. что выполняются условия

$$\theta C_i^{n+1} + \sigma - 1 \geq 0, \quad \sigma - (1 - \theta) C_i^{n+1} \geq 0, \quad 1 - \sigma + (1 - \theta) C_i^{n+1} \geq 0. \quad (6.39)$$

В этом случае из (6.38) следует оценка

$$v_i^{n+1} \leq \max \{v_{i-1}^{n+1}, v_{i-1}^n, v_i^n\}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad n = 0, 1, \dots, M - 1. \quad (6.40)$$

При $i = 1$ оценка (6.40) с учетом (6.33) дает

$$v_1^{n+1} \leq \max \{g(t_{n+1}), g(t_n), v_1^n\}, \quad n = 0, 1, \dots, M. \quad (6.41)$$

При $i = 2$ из (6.40) с учетом (6.41) имеем

$$v_2^{n+1} \leq \max \{v_1^{n+1}, v_1^n, v_2^n\} \leq \max \{g(t_{n+1}), g(t_n), v_1^n, v_2^n\}.$$

Продолжая этот процесс, получаем для любых $i \leq N, n \leq M - 1$

$$v_i^{n+1} \leq \max \{g(t_{n+1}), g(t_n), v_1^n, \dots, v_i^n\}.$$

В результате приходим к оценке

$$\max_{0 \leq i \leq N} v_i^{n+1} \leq \max \{g(t_{n+1}), g(t_n), v_1^n, v_2^n, \dots, v_N^n\}. \quad (6.42)$$

Аналогичным образом получаем

$$\max_{0 \leq i \leq N} v_i^n \leq \max \{g(t_n), g(t_{n-1}), v_1^{n-1}, v_2^{n-1}, \dots, v_N^{n-1}\}.$$

так что

$$\max_{0 \leq i \leq N} v_i^{n+1} \leq \max \{g(t_{n+1}), g(t_n), g(t_{n-1}), v_1^{n-1}, v_2^{n-1}, \dots, v_N^{n-1}\}.$$

Продолжая этот процесс и дальше, приходим к следующей оценке на сеточное решение сверху

$$\max_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 0 \leq n \leq M}} v_i^n \leq \max \left\{ \max_{0 \leq i \leq N} \varphi^h(x_i), \max_{0 \leq n \leq M} g^\tau(t_n) \right\}. \quad (6.43)$$

Аналогичным образом выводится оценка снизу

$$\min_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 0 \leq n \leq M}} v_i^n \geq \min \left\{ \min_{0 \leq i \leq N} \varphi^h(x_i), \min_{0 \leq n \leq M} g^\tau(t_n) \right\}. \quad (6.44)$$

Объединяя оценки (6.43) и (6.44), приходим к неравенству

$$m_{h\tau} \leq v_i^n \leq M_{h\tau}, \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad n = 0, 1, \dots, M, \quad (6.45)$$

где

$$m_{h\tau} = \min \left\{ \min_{0 \leq i \leq N} \varphi^h(x_i), \min_{0 \leq n \leq M} g^\tau(t_n) \right\}, \quad M_{h\tau} = \max \left\{ \max_{0 \leq i \leq N} \varphi^h(x_i), \max_{0 \leq n \leq M} g^\tau(t_n) \right\}.$$

Неравенство (6.45) является искомым разностным аналогом принципа максимума (6.11). Следствием неравенства (6.45) является априорная оценка

$$\|v^{h\tau}\|_{C[\overline{\omega}^{h\tau}]} = \max_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 0 \leq n \leq M}} |v_i^n| \leq \max(\|\varphi^h\|_{C[\overline{\omega}^{h\tau}]}, \|g^h\|_{C[\overline{\omega}^{h\tau}]}), \quad (6.46)$$

где

$$\|\varphi^h\|_{C[\overline{\omega}^h]} = \max_{0 \leq i \leq N} |\varphi^h(x_i)|, \quad \|g^\tau\|_{C[\overline{\omega}^\tau]} = \max_{0 \leq n \leq M} |g^\tau(t_n)|.$$

Из которой в свою очередь вытекает устойчивость схемы (1) по начальным и граничным данным (при выполнении условий (6.37), (6.38)).

Осталось выяснить, при каких условиях на σ и θ коэффициенты в (6.38) удовлетворяют неравенствам (6.39). Рассматривая последовательно случаи $\theta = 0$, $\theta \in (0, 1)$ и $\theta = 1$, легко проверить, что неравенства (6.39) для этих случаев можно переписать следующим образом

$$\theta = 0, \quad \sigma = 1 \quad \text{и} \quad C_i^{n+1} \equiv \frac{a\tau_{n+1}}{h_i} \leq 1, \quad (6.47)$$

$$\theta \in (0, 1), \quad \sigma \in (0, 1) \quad \text{и} \quad \frac{1 - \sigma}{\theta} \leq \frac{a\tau_{n+1}}{h_i} \leq \frac{\sigma}{1 - \theta}, \quad (6.48)$$

$$\theta = 1, \quad \sigma \in [0, 1] \quad \text{и} \quad 1 - \sigma \leq \frac{a\tau_{n+1}}{h_i}. \quad (6.49)$$

Условие (6.47) впервые было введено в 1928г. в работе Куранта, Фридрикса, Леви [7] - одной из первых работ по МКР при рассмотрении схемы

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau_{n+1}} + a \frac{v_i^n - v_{i-1}^n}{h_i} = f_i^n, \quad (6.50)$$

отвечающей случаю $\theta = 0, \sigma = 1$, и носит название *условия Куранта*. Само число C_i^{n+1} называют *локальным числом Куранта*. Как вытекает из предыдущего изложения, при выполнении условия (6.47) сеточное решение удовлетворяет принципу максимума и, следовательно, устойчиво зависит от начальных и граничных данных. Поскольку условие (6.47) означает ограничение на шаг τ_{n+1} то отвечающая случаю $\theta = 0, \sigma = 1$ схема (1) является условно устойчивой.

Аналогичный смысл имеет условие (6.48), которое мы будем называть *обобщенным условием Куранта*. Во-первых, условие (6.48) означает ограничение на выбор параметра σ (либо θ) при фиксированном θ (либо σ), который должен удовлетворять условию

$$\frac{1 - \sigma}{\theta} \leq \frac{\sigma}{1 - \theta} \implies \sigma \geq 1 - \theta \quad (\sigma + \theta \geq 1). \quad (6.51)$$

Из (6.51) видно, что с увеличением θ условие на σ ослабляется и наоборот уменьшение θ должно компенсироваться увеличением σ . Во-вторых, (6.48) означает ограничение на шаг τ_{n+1} (при фиксированном h_i). При этом, чем ближе к единице сумма $\sigma + \theta$, тем жестче указанное условие. В частности, при $\sigma + \theta = 1$ условие (6.48) требует, чтобы шаг τ_{n+1} был жестко связан с шагом h_i соотношением $\tau_{n+1} = h_i/a$. Наоборот, при $\sigma = \theta = 1$ условие (6.48), а следовательно, и принцип максимума, выполняется при любых значениях шагов h и τ . Это означает, что при $\sigma = \theta = 1$ сеточное решение удовлетворяет принципу максимума при любых соотношениях между шагами h и τ и, следовательно, соответствующая схема (1) является абсолютно устойчивой.

Таким образом, для того, чтобы сеточное решение удовлетворяло принципу максимума (6.45), достаточно, чтобы параметры σ и θ удовлетворяли условию (6.51), а шаги τ_{n+1} и h_i - условию (6.48). Указанный факт справедлив для любых значений $\theta \in [0, 1]$ и $\sigma \in [0, 1]$ в том числе и при $\theta = 0$ и $\theta = 1$. При $\theta = 0$ условие (6.51) означает, что $\sigma = 1$, а в (6.48) следует рассматривать только второе неравенство, переходящее в условие Куранта (6.47). При $\theta = 1$ условие (6.51) выполняется при любом $\sigma \in [0, 1]$, а в (6.48) следует рассматривать только первое неравенство, переходящее в (6.49). Подчеркнем при этом, что условия (6.48), (6.51) дают лишь достаточные условия, при

которых выполняется принцип максимума (6.45), обеспечивающий (условную) устойчивость разностной схемы (1). Другие достаточные (причем менее жесткие) условия на параметры σ и θ , обеспечивающие устойчивость схемы (1) (без выполнения, вообще говоря, принципа максимума (6.45)), можно получить, если воспользоваться сеточным аналогом изложенного в п.1 главы второй метода энергетических неравенств исследования корректности начально-краевых задач для дифференциальных уравнений.

6.5. Исследование устойчивости энергетическим методом. Рассмотрим для простоты случай, когда

$$\sigma = 1/2, \quad q = q(t) \geq 0. \quad (6.52)$$

причем $g(t) = 0$, так что краевое условие (6.33) принимает вид

$$v_0^{n+1} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, M - 1. \quad (6.53)$$

Следуя [1], введем пространства сеточных функций,

$$H_{N+1} = \{w^h = (w_0, w_1, \dots, w_N)\}, \quad \mathring{H}_N = \{v^h = (0, v_1, \dots, v_N)\}$$

$$H_N = \{f^h = (f_1, f_2, \dots, f_N)\},$$

заданных на неравномерной сетке (4.3), и рассмотрим два оператора A и $D : H_{N+1} \rightarrow H_N$, действующие по формулам

$$(Av)_i = \frac{v_i + v_{i-1}}{2}, \quad (Dv)_i = \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6.54)$$

Легко проверяется, что

$$\sum_{i=1}^N (Av)_i (Dv)_i h_i = \frac{1}{2} (v_N^2 - v_0^2) \quad \forall v \in H_{N+1}, \quad (6.55)$$

и что

$$\sum_{i=1}^N (Av)_i^2 h_i + v_0^2 h_1 = 0 \iff v = 0 \quad (v \in H_{N+1}). \quad (6.56)$$

Из (6.56), в частности, следует, что билинейная форма

$$(v, w)_A \equiv \sum_{i=1}^N (Av)_i (Aw)_i h_i + v_0 w_0 h_1 \quad (6.57)$$

определяет в H_N скалярное произведение и гильбертову норму

$$\|v\|_A^2 = (v, v)_A = \sum_{i=1}^N (Av)_i^2 h_i + v_0^2 h_1. \quad (6.58)$$

Введем далее два основных для схемы (1) пространства двумерных сеточных функций

$$U_{h\tau} = C[\bar{\omega}^\tau, H_{N+1}] = \left\{ v^{h\tau} : v^{h\tau}(t_n) \equiv v^n \in \mathring{H}_N, \quad n = 0, 1, 2, \dots, M \right\},$$

$$F_{h\tau} = L^1(\bar{\omega}^\tau, H_N) = \left\{ f^{h\tau} : f^{h\tau}(t_n) \in H_{N+1}, \quad n = 1, 2, \dots, M \right\}.$$

с нормами (являющимися сеточными аналогами норм (6.14)):

$$\|v^{h\tau}\|_{U_{h\tau}} = \max_{0 \leq n \leq M} \|v^n\|_A, \quad \|f^{h\tau}\|_{F_{h\tau}} = \sum_{n=1}^M \|f^{h\tau}(t_n)\|_{A\tau_n} \quad (6.59)$$

и запишем разностное уравнение (6.29) с учетом (6.52) и (6.54) в виде

$$\left(A \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau_{n+1}} \right)_i + a(Dv^{n+\theta})_i + q^{n+\theta}(Av^{n+\theta})_i = [Af^{h\tau}(t_{n+1})]_i \equiv (Af^{n+\theta})_i. \quad (6.60)$$

Здесь используются обозначения, аналогичные (6.28), (6.30). В частности,

$$f^{h\tau}(t_{n+1}) = f^{n+\theta} = (1 - \theta)f^n + \theta f^{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, M - 1, \quad (6.61)$$

где

$$f^n = (f(x_0, t_n), f(x_1, t_n), \dots, f(x_N, t_n)), \quad n = 0, 1, \dots, M.$$

Умножим далее (6.60) на $(Av^{n+\theta})_i h_i$ и просуммируем по i от 1 до N . Учитывая (6.53), (6.55), (6.57), (6.58) и (6.61), получим

$$\begin{aligned} & \theta \|v^{n+1}\|_A^2 + (1 - 2\theta)(v^{n+1}, v^n)_A - (1 - \theta) \|v^n\|_A^2 + \frac{a\tau_{n+1}}{2} (v_N^{n+\theta})^2 + \\ & + \tau_{n+1} q^{n+\theta} \|v^{n+\theta}\|_A^2 = \tau_{n+1} [(1 - \theta)(f^{n+\theta}, v^n)_A + \theta(f^{n+\theta}, v^{n+1})_A]. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Предположим, что

$$\theta \geq 1/2. \quad (6.63)$$

В силу (6.52) и условия (6.63) последние два слагаемых в левой части (6.62) неотрицательны. Отбрасывая их и применяя неравенство Коши ко всем скалярным произведениям в (6.62), приходим с учетом (6.63) к следующему неравенству

$$\begin{aligned} & \theta \|v^{n+1}\|_A^2 + [(1 - 2\theta) \|v^n\|_A - \tau_{n+1} \theta \|f^{n+\theta}\|_A] \|v^{n+1}\|_A - \\ & - (1 - \theta) [\|v^n\|_A (\|v^n\|_A + \tau_{n+1} \|f^{n+\theta}\|_A)] \leq 0. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Предположим, что величина $\|v^n\|_A$ известна. Тогда (6.64) представляет собой квадратное неравенство для $\|v^{n+1}\|_A$. Чтобы решить его, нужно сначала найти корни

квадратного уравнения, отвечающего этому неравенству. Легко проверить, что первый корень указанного уравнения отрицателен, а второй – равен $\|v^n\|_A + \tau_{n+1}\|f^{n+\theta}\|_A$. Тогда из свойств неравенств и (6.64) вытекает, что

$$\|v^{n+1}\|_A \leq \|v^n\|_A + \tau_{n+1}\|f^{n+\theta}\|_A. \quad (6.65)$$

Неравенство (6.65) содержит информацию, из которой легко выводится абсолютная устойчивость схемы по начальным данным и правой части. Действительно, заменяя в (6.65) n на $n - 1$, имеем

$$\|v^n\|_A \leq \|v^{n-1}\|_A + \tau_n\|f^{n-1+\theta}\|_A.$$

Отсюда и (6.65) получаем

$$\|v^{n+1}\|_A \leq \|v^{n-1}\|_A + \tau_n\|f^{n-1+\theta}\|_A + \tau_{n+1}\|f^{n+\theta}\|_A.$$

Продолжая этот процесс и дальше, приходим к соотношению

$$\|v^{n+1}\|_A \leq \|\varphi^h\|_A + \sum_{m=0}^n \|f^{m+\theta}\|_A \tau_{m+1}, \quad (6.66)$$

которое с учетом (6.59) можно переписать в виде

$$\|v^{h\tau}\|_{U_{h\tau}} \leq \|\varphi^h\|_A + \|f^{h\tau}\|_{F_{h\tau}}. \quad (6.67)$$

Неравенство (6.67) является аналогом для сеточного решения априорной оценки (6.18), справедливой для точного решения u дифференциальной задачи (6.1a)-(6.3) при $g = 0$, $q \geq 0$. Из (6.67) вытекает абсолютная устойчивость разностной схемы (1). Подчеркнем, что она доказана при дополнительных условиях $\sigma = 1/2$ и $\theta \geq 1/2$ на параметры σ и θ , входящие в (6.29). Условие $\sigma = 1/2$ нами было выбрано, с одной стороны, для простоты и конкретности, а с другой – по той причине, что именно при $\sigma = 1/2$ схема (6.29) имеет наивысший (второй) порядок аппроксимации по x . Аналогичным образом можно показать устойчивость схемы (1) и при $\sigma > 1/2$, однако на этом мы не будем останавливаться. Условие $\theta \geq 1/2$ является существенным и используется при выводе из (6.62) основного неравенства (6.64), из которого вытекает абсолютная устойчивость разностной схемы. (При $\theta < 1/2$ указанного неравенства получить не удастся).

В заключение отметим, что при $f = 0$, $q = 0$, $\theta = 1/2$ соотношение (6.62) принимает вид

$$\|v^{n+1}\|_A^2 = \|v^n\|_A^2 - a\tau_{n+1}(v_N^{n+\theta})^2.$$

Отсюда обычным уже образом приходим к неравенству

$$\|v^{n+1}\|_A^2 = \|\varphi^h\|_A^2 - a \sum_{m=0}^n (v_N^{m+\theta})^2,$$

имеющему смысл сеточного аналога закона сохранения “энергии” (6.22) (при $g = 0$). Это означает, что при $\sigma = \theta = 1/2$ схема (1) является консервативной разностной схемой.

6.6. Исследование устойчивости методом гармоник. Классификация двухточечных разностных схем. В этом пункте мы рассмотрим однородную схему (6.29) (при $f = 0, q = 0$), аппроксимирующую однородное уравнение

$$u_t + au_x = 0, \tag{6.68}$$

и приведем необходимые условия устойчивости соответствующей схемы (1), используя так называемый *метод гармоник*. Прежде чем переходить к изложению этого метода, отметим, что общее решение однородного уравнения (6.68) можно представить в виде

$$u(x, t) = F(x - at), \tag{6.69}$$

где $F \in C^1$ – произвольная функция одного аргумента. По своему физическому смыслу функция (6.69) описывает плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси x со скоростью a [3, с.40]. Важную роль играют гармонические плоские волны, описываемые формулами

$$A\cos(kx - \omega t) \quad (\text{или} \quad A\sin(kx - \omega t)). \tag{6.70}$$

Здесь ω – круговая частота, $k = \omega/a$ – волновое число, A – амплитуда гармонической волны. Нам будет удобно пользоваться комплексной записью волны (6.70) в виде

$$u = Ae^{j(kx - \omega t)}, \quad j = \sqrt{-1}, \tag{6.71}$$

или

$$u = Aq(t)e^{jkx}. \tag{6.72}$$

где $q(t) = e^{-j\omega t}$. Функцию (6.72) будем называть *гармоникой*, а $q(t)$ – ее *переменной амплитудой*. Важно отметить, что

$$|q(t)| = 1 \quad \forall t. \tag{6.73}$$

Отсюда следует, что возникшее в начальный момент времени $t = t_0$ возмущение в среде, описываемое функцией (6.71) при $t = t_0$, переносится без искажения, т.е.

волна (6.68) не затухает и не возрастает с увеличением t . Это вытекает из свойств уравнения (6.68) описывающего “идеальные” волновые процессы [3, с.41].

Метод *гармоник* исследования устойчивости разностных схем вида (6.29) основан на изучении поведения во времени сеточного аналога гармонической волны (6.71), который мы будем называть *сеточной гармоникой*. Указанную гармонику формально можно записать в виде (6.72), где точка (x, t) пробегает узлы сетки $\bar{\omega}^{ht}$, описываемой формулой (5.2), k – по-прежнему связано с частотой, $q(t)$ – сеточная переменная амплитуда, зависящая от $t \in \bar{\omega}^t$. В частном случае, когда сетка (2.2) является равномерной, так что

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, M, \quad (6.74)$$

сеточная гармоника $v = (v_i^n)$ описывается формулой

$$v_i^n = q(t_n) e^{jkih} \equiv q^n (e^{jkh})^i = q^n p^i, \quad p = e^{jkh}. \quad (6.75)$$

Здесь $q \in C$ – некоторое число, q^n (либо p^i) – обозначает n -ю (либо i -ю) степень числа q (либо p). Поскольку функция (6.75) является аналогом гармоники (6.71), то естественно потребовать, чтобы число $q = q(k)$ в (6.75) удовлетворяло аналогу условия (6.73), имеющему вид

$$|q(k)| = 1. \quad (6.76)$$

Однако для произвольной разностной схемы это условие может не выполняться. Если при этом окажется, что для некоторого k

$$|q(k)| > 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon = \text{const}, \quad (6.77)$$

то соответствующая гармоника будет со временем неограниченно возрастать. Это означает неустойчивость рассматриваемой схемы на этой гармонике. Последнее влечет за собой неустойчивость разностной схемы, поскольку ее решение, будучи разложено на сумму гармоник, может содержать “неустойчивую” гармонику с $|q| > 1 + \varepsilon$.

Если при всех $k \in \mathbb{R}$

$$|q(k)| \leq 1, \quad (6.78)$$

то любая гармоника является устойчивой. Однако отсюда еще не вытекает, вообще говоря, устойчивость самой разностной схемы. Поэтому условие (6.77) является достаточным условием неустойчивости, а условие (6.78) – всего лишь необходимым условием устойчивости рассматриваемой разностной схемы. Хотя следует отметить, что в некоторых случаях условие (6.78) является необходимым и достаточным условием устойчивости разностной схемы. Это будет, грубо говоря, тогда, когда каждое

решение разностной задачи можно представить в виде линейной комбинации гармоник (см. §9).

Следует различать случаи, когда $|q| = 1$ и $|q| < 1$. В обоих случаях соответствующая гармоника устойчива. Однако во втором случае в отличие от первого происходит нарушение свойства (6.73) постоянства модуля амплитуды гармоники (6.71). Уменьшение амплитуды волны с ростом t обычно наблюдается тогда, когда в среде присутствует некоторое затухание, например, из-за сил вязкого трения. Поэтому условие $|q(k)| < 1$ означает наличие затухания в среде. Однако, поскольку для точного решения уравнения (6.68) затухание отсутствует, то, следовательно, оно вносится самой разностной схемой за счет неточности аппроксимации уравнения (6.68). Таким образом, недостаточно точная аппроксимация уравнения (6.68) приводит к появлению искусственной вязкости в дискретной модели, т.е. в рассматриваемой разностной схеме, следствием чего и является затухание сеточных гармоник. Поскольку эта вязкость возникает только в разностной схеме и отсутствует в исходном уравнении, то она называется *схемной вязкостью*, а соответствующие схемы называются *диссипативными* или *вязкими*. Разностные схемы, для которых указанный эффект не наблюдается, точнее для которых выполняется условие (6.76) при любом $k \in \mathbb{R}$, называются *недиссипативными* или *невязкими*. С формальной точки зрения недиссипативные схемы лучше диссипативных. Однако, в некоторых случаях диссипативные схемы предпочтительнее недиссипативных, например, в случае, когда они применяются при исследовании волновых процессов в средах с вязкостью.

Применим метод гармоник для исследования устойчивости схемы (6.29) на равномерной сетке (6.74). Запишем ее в виде

$$\frac{(1 - \sigma)v_{i-1}^{n+1} + \sigma v_i^{n+1} - (1 - \sigma)v_{i-1}^n - \sigma v_i^n}{\tau} + a \frac{(1 - \theta)v_i^n + \theta v_i^{n+1} - (1 - \theta)v_{i-1}^n - \theta v_{i-1}^{n+1}}{h} = 0. \quad (6.79)$$

Будем искать частные решения (6.79) в виде (6.75), где q – неизвестное число. Подставляя (6.75) в (6.79) и учитывая, что

$$v_{i-1}^n = q^n p^{i-1}, \quad v_i^{n+1} = q^{n+1} p^i, \quad v_{i-1}^{n+1} = q^{n+1} p^{i-1}, \quad v_{i+1}^{n+1} = q^{n+1} p^{i+1}, \quad (6.80)$$

приходим после приведения подобных членов к соотношению (при $C = a\tau/h$)

$$q^{n+1} p^{i-1} (1 - \sigma - \theta C) + q^{n+1} p^i (\sigma + \theta C) + q^n p^i [(1 - \theta)C - \sigma] - q^n p^{i-1} [1 - \sigma + (1 - \theta)C] = 0. \quad (6.81)$$

Сокращая на множитель $q^n p^{i-1} \neq 0$ и предполагая, что

$$1 - \sigma - \theta C + p(\sigma + \theta C) \neq 0, \quad (6.82)$$

приходим из (6.81) к равенству

$$q = 1 + \frac{C - Cp}{1 - \sigma - \theta C + p\sigma + p\theta C}. \quad (6.83)$$

Ограничимся ниже рассмотрением ряда частных случаев, при этом одновременно произведем классификацию наиболее типичных разностных схем по их порядку аппроксимации и устойчивости.

1. $\theta = 0, \sigma = 0$. Соответствующая (неоднородная) схема имеет вид

$$\frac{v_{i-1}^{n+1} - v_{i-1}^n}{\tau} + a \frac{v_i^n - v_{i-1}^n}{h} = f_{i-1}^n, \quad O(h + \tau), \quad (6.84)$$

где справа от схемы записан ее локальный порядок аппроксимации. Подставляя значения $\theta = 0, \sigma = 0$ в (6.83), имеем

$$q = 1 + C - Cp = 1 + C - C\cos kh - jC\sin kh \implies$$

$$q^2 = 1 + 2C^2 + 2C - 2C\cos kh - 2C^2\cos kh = 1 + 4C(1 + C)\sin^2 \frac{kh}{2}. \quad (6.85)$$

Из (6.85) следует неустойчивость схемы (6.84), так что (6.84) нельзя применять при проведении численных расчетов.

2. $\theta = 0, \sigma = 1/2$. Учитывая, что

$$p = e^{jkh}, \quad p^{-1} = e^{-jkh}, \quad \frac{1-p}{1+p} = \frac{e^{-jkh/2} - e^{jkh/2}}{e^{-jkh/2} + e^{jkh/2}} = -j\operatorname{tg}(kh/2), \quad (6.86)$$

из (6.83) аналогичным образом получаем

$$q = 1 + 2C \frac{1-p}{1+p} = 1 - 2iC\operatorname{tg}(kh/2), \quad |q|^2 = 1 + 4C^2\operatorname{tg}^2(kh/2). \quad (6.87)$$

Отсюда вытекает абсолютная неустойчивость рассматриваемой схемы.

3. $\theta = 0, \sigma = 1$. Соответствующая схема, имеющая порядок аппроксимации $O(h + \tau)$, имеет вид (6.50). Подставляя значения $\theta = 0, \sigma = 1$ в (6.83), получаем

$$q = 1 + \frac{1}{p}C(1-p) = 1 - C + Cp^{-1} = (1 - C + C\cos kh) - jC\sin kh \implies \quad (6.88)$$

$$|q|^2 = 1 + 4C(C-1)\sin^2 \frac{kh}{2}. \quad (6.89)$$

Из (6.89) следует, что условие (6.77) выполняется только, если

$$C \equiv a\tau/h > 1. \quad (6.90)$$

Следовательно, (6.90) является условием неустойчивости схемы (6.50). В то же время, если $C = 1$ или

$$C \equiv a\tau/h < 1, \quad (6.91)$$

то $|q(k)| \leq 1$ для всех $k \in \mathbb{R}$. Это означает, что неравенство $C \leq 1$ является необходимым условием устойчивости схемы (6.50). Важно отметить при этом, что оно является и достаточным условием устойчивости схемы (6.50), поскольку при этом условии для сеточного решения выполняется принцип максимума (см. п.4). На основании этих результатов приходим к выводу, что схема (6.50) условно устойчива, причем неравенство $C \leq 1$ является необходимым и достаточным условием ее устойчивости.

Особо отметим случай $C = 1$. В этом случае из (6.88) вытекает, что $q(k) = 1$ и следовательно, схема (6.50) недиссипативна. Это не случайно и объясняется тем фактом, что при $C = 1$ схема (6.50) при $f = 0$ принимает совсем простой вид

$$v_i^{n+1} = v_{i-1}^n. \quad (6.92)$$

Формула (6.92) означает, что значение сеточного решения v в узле (x_i, t^{n+1}) равно значению в узле (x_{i-1}, t^n) , а следовательно, значению v в любом другом узле, расположенном вдоль прямой соединяющей узлы (x_{i-1}, t^n) и (x_i, t^{n+1}) . Отсюда, в частности, вытекает, что значение v_i^{n+1} равно значению функции φ при $x_i > at_m$ и функции g при $x_i < at_n$. Но таким же свойством обладает точное решение (6.69) уравнения (6.68). Это означает, что схема (6.92) абсолютно точно аппроксимирует дифференциальное уравнение (6.68) или, как говорят, имеет *бесконечный* порядок аппроксимации [8, с.379]. В этом можно убедиться и непосредственно, используя разложение по формуле Тейлора. Отметим также, что при $C = 1$ схема (6.50) фактически переходит в так называемый метод *характеристик* интегрирования уравнений 1-го порядка.

4. $\theta = 1/2, \sigma = 0$. Из (6.83) имеем

$$q = 1 + \frac{C - pC}{1 - C/2 + pC/2} = \frac{2 + C(1 - \cos kh) - Cj \sin kh}{2 - C(1 - \cos kh) + Cj \sin kh}. \quad (6.93)$$

Из (6.93) следует, что $q(k) > 1$ при $\cos kh < 1$ и, следовательно, соответствующая схема неустойчива.

5. $\theta = 1/2, \sigma = 1/2$. Мы уже знаем из п. 5, что соответствующая схема, имеющая наивысший порядок $O(h^2 + \tau^2)$, является консервативной и абсолютно устойчивой. Из (6.83), кроме того, следует, что

$$q(k) = 1 + \frac{2C(1-p)}{1-C+p+Cp} = \frac{1+p+C(1-p)}{1+p-C(1-p)} = \frac{1-Cj \operatorname{tg}(kh/2)}{1+Cj \operatorname{tg}(kh/2)} \implies |q(k)| = 1 \quad \forall k \in \mathbb{R},$$

так что указанная схема, к тому же, недиссипативна.

6. $\theta = 1/2, \sigma = 1$. Соответствующая схема имеет вид

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} + a \frac{v_i^n - v_{i-1}^n + v_i^{n+1} - v_{i-1}^{n+1}}{2h} = \frac{1}{2}(f_i^n + f_i^{n+1}), \quad O(h + \tau^2). \quad (6.94)$$

Из (6.83) имеем

$$q = 1 + \frac{C - pC}{p - C/2 + pC/2} = \frac{2 - C(1 - \cos kh) - Cj\sin kh}{2 + C(1 - \cos kh) + Cj\sin kh}. \quad (6.95)$$

Сравнивая (6.95) с (6.93), приходим к выводу, что модули q для случаев 6 и 4 взаимно обратны, так что $|q(k)| < 1$ при $\cos kh < 1$. Отсюда и результатов п.5 вытекает, что схема (6.94) абсолютно устойчива и диссипативна.

7. $\theta = 1, \sigma = 0$. Соответствующая схема имеет вид

$$\frac{v_{i-1}^{n+1} - v_{i-1}^n}{\tau} + a \frac{v_i^{n+1} - v_{i-1}^{n+1}}{h} = f_{i-1}^{n+1}, \quad O(h + \tau). \quad (6.96)$$

Подставляя значения $\theta = 1, \sigma = 0$ в (6.83), имеем

$$q = 1 + \frac{C(1-p)}{1+pC-C} = \frac{1}{1+pC-C} = \frac{1}{1-C+C\cos kh - jC\sin kh}. \quad (6.97)$$

Сравнивая (6.97) с (6.88), замечаем, что модули: q для случаев 7 и 3 взаимно обратны. Отсюда вытекает, что схема (6.96) неустойчива при выполнении условия (6.91) и что условие $C \geq 1$ является необходимым, а в силу результатов п.4 и достаточным условием устойчивости указанной схемы. Таким образом, схема (6.96) условно устойчива. При $C = 1$ и $f = 0$ схема (6.96) принимает вид (6.92) со всеми вытекающими отсюда последствиями.

8. $\theta = 1, \sigma = 1/2$. Из (6.83) имеем

$$q = 1 + \frac{2C(1-p)}{1+p-2C(1-p)} = \frac{1}{1-2C\frac{1-p}{1+p}} = \frac{1}{1+C2j\operatorname{tg}(kh/2)}.$$

Сравнивая со случаем 2 и учитывая результаты п.5, приходим к выводу, что соответствующая схема, имеющая порядок $O(h^2 + \tau)$, абсолютно устойчива и диссипативна.

9. $\theta = 1, \sigma = 1$. Соответствующая схема имеет вид

$$\frac{v_i^{n+1} + v_i^n}{\tau} + a \frac{v_i^{n+1} - v_{i-1}^{n+1}}{h} = f_i^{n+1}, \quad O(h + \tau). \quad (6.98)$$

Подставляя значения $\theta = 1, \sigma = 1$ в (6.83), имеем

$$q = 1 + \frac{C - pC}{-C + p + pC} = \frac{1}{1 + C - Cp^{-1}} = (1 + C - C\cos kh + jC\sin kh)^{-1}. \quad (6.99)$$

Сравнивая со случаем 1 и учитывая результаты п.5, приходим к выводу, что схема (6.93) абсолютно устойчива и диссипативна.

Приведенные здесь результаты удобно изобразить в виде следующей таблицы, смысл которой очевиден. А именно: пусть нам требуется выяснить свойства схемы (6.29) при $\theta = 1$, $\sigma = 1$. Посмотрев на таблицу, делаем вывод, что указанная схема имеет порядок $O(h + \tau)$ и абсолютно устойчива. В то же время при $\theta = 1$, $\sigma = 0$ схема устойчива только при выполнении условия $C \geq 1$.

σ	0	1/2	1	
θ				
0	H/y	H/y	y/y ($C \leq 1$)	τ
1/2	H/y	a/y	a/y	τ^2
1	y/y ($C \geq 1$)	a/y	a/y	τ
	h	h^2	h	

§7. Двухслойные трехточечные разностные схемы для уравнения переноса

Целью этого параграфа является построение и изучение двух параметрического семейства двухслойных трехточечных разностных схем для уравнения переноса (6.1), рассматриваемого при соответствующих начальных и краевых условиях.

7.1. Построение разностных схем. Для построения двухслойной трехточечной разностной схемы, аппроксимирующей уравнение (6.1a), введем сетку (5.2) и проинтегрируем выражение $Lv - f$ по элементарному участку

$$Q_{i-1,i+1}^{n,n+1} = \{(x, t) : x_{i-1} < x < x_{i+1}, t_n < t < t_{n+1}\}. \quad (7.1)$$

Получим

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (Lv - f) dx dt = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (v^{n+1} - v^n) dx + a \int_{t_n}^{t_{n+1}} (v_{i+1} - v_{i-1}) dt + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (qv - f) dx dt.$$

Предполагая для простоты сетку равномерной по x и аппроксимируя интегралы по x квадратурной формулой (4.21), а интегралы по t – формулой (6.27), обычным уже образом приходим к следующему двухпараметрическому семейству схем

$$\left(A_\alpha \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau_{n+1}} \right)_i + a \frac{v_{i+1}^{n+\theta} - v_{i-1}^{n+\theta}}{2h} + (A_\alpha (q^{n+\theta} v^{n+\theta} - f^{n+\theta}))_i = 0, \quad (7.2)$$

$$i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad n = 0, 1, \dots, M - 1.$$

Из теоремы 1 §5 вытекает, что схема (7.2) имеет локальный порядок аппроксимации

$$O(h^{p(\alpha)} + \tau^{s(\theta)}) \quad (7.3)$$

на решении $u \in C^{p(\alpha)+1}$. Из (4.5) следует, что наивысший порядок аппроксимации $-O(h^4 + \tau^2)$ (для шаблона $\omega_{i-1,i+1}^{n,n+1}$) схема (7.2) имеет при $\alpha = 1/6$ и $\theta = 1/2$, чему отвечает аппроксимация интегралов в (7.1) при помощи формулы Симпсона по x и трапеций по t , являющихся квадратурными формулами наивысшей точности соответственно для шаблонов $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ по x и $\{t_n, t_{n+1}\}$ по t .

Следует отметить, что схема (7.2) не замкнутая, поскольку при каждом фиксированном n она содержит $N - 1$ уравнение для $N + 1$ неизвестных v_i^{n+1} , $i = 0, 1, \dots, N$. Если приписать i -тое уравнение в (7.2) i -му узлу (x_i, t_{n+1}) , то ясно видно, что в (7.2) не хватает одного уравнения для левого граничного узла (x_0, t_{n+1}) и одного уравнения для правого граничного узла (x_n, t_{n+1}) . Вследствие этого система уравнений (7.2) может иметь бесчисленное множество решений.

Чтобы замкнуть систему (7.2), можно воспользоваться двумя путями. Первый путь, применимый при аппроксимации задачи (6.1a)–(6.3), заключается в присоединении к системе (7.2) уравнения (6.33) для левого граничного узла и дополнительного разностного уравнения для правого граничного узла. В качестве такого уравнения можно взять, например, двухточечное разностное уравнение (6.29) при $i = N$, имеющее локальный порядок аппроксимации $O(h^{s(\sigma)} + \tau^{s(\theta)})$. Таким образом приходим к замкнутой системе $N + 1$ уравнений для нахождения неизвестных v_i^{n+1} :

$$v_0^{n+1} = g(t_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, M - 1, \quad (7.4)$$

$$\frac{\alpha v_{i-1}^{n+1} + (1 - 2\alpha)v_i^{n+1} + \alpha v_{i+1}^{n+1} - \alpha v_{i-1}^n - (1 - 2\alpha)v_i^n - \alpha v_{i+1}^n}{\tau_{n+1}} + a \frac{\theta(v_{i+1}^{n+1} - v_{i-1}^{n+1}) + (1 - \theta)(v_{i+1}^n - v_{i-1}^n)}{2h} + (A_\alpha(q^{n+\theta}v^{n+\theta} - f^{n+\theta}))_i = 0, \quad (7.5)$$

$$\frac{(1 - \sigma)v_{N-1}^{n+1} + \sigma v_N^{n+1} - (1 - \sigma)v_{N-1}^n - \sigma v_N^n}{\tau_{n+1}} + a \frac{\theta(v_N^{n+1} - v_{N-1}^{n+1}) + (1 - \theta)(v_N^n - v_{N-1}^n)}{h} =$$

$$= f_{N-1+\sigma}^{n+\theta}. \quad (7.6)$$

Однако при этом происходит нарушение однородности разностной схемы и потеря глобального порядка аппроксимации по x за счет низкого локального порядка аппроксимации уравнения (7.6). Этот факт доказывается так же, как и выше.

Второй путь применим в случае, когда исходные данные и решение задачи (6.1a), (6.2) являются периодическими по x функциями с периодом l . В этом случае граничное условие (6.3) снимается, а его роль играет условие периодичности

$$u(x + l, t) = u(x, t) \quad \forall x; t \in [0, T] \quad (7.7)$$

для исходной задачи и условие

$$v_{i+N}^{n+1} = v_i^{n+1}, \quad i = 0, 1, \dots; n = 0, 1, \dots, M-1, \quad (7.8)$$

для разностной задачи. Условие периодичности (7.8) позволяет применять уравнение (7.2) не только для внутренних узлов, но и для граничных узлов, в результате чего можно получить замкнутую систему для нахождения неизвестных v_i^{n+1} , $i = 1, 2, \dots, N$. Важно отметить, что при этом не происходит нарушения однородности построенной схемы, так что ее порядок аппроксимации определяется формулой (7.3).

7.2. Реализация разностных схем. Рассмотрим вопрос о реализации построенных в п.1 схем. Предположим для простоты, что $q(x, t) = 0$, и обратимся сначала к схеме (7.4)–(7.6). Предполагая значения решения на n -м слое в (7.5) и (7.6) известными и относя их в правую часть, перепишем уравнения (7.5) и (7.6) в виде

$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\theta C^{n+1} \right) v_{i-1}^{n+1} + (1 - 2\alpha)v_i^{n+1} + \left(\alpha + \frac{1}{2}\theta C^{n+1} \right) v_{i+1}^{n+1} = \tilde{f}_i^n, \quad (7.9)$$

$$(1 - \sigma - \theta C^{n+1})v_{N-1}^{n+1} + (\sigma + \theta C^{n+1})v_N^{n+1} = \tilde{f}_N^n, \quad n = 0, 1, \dots, M-1. \quad (7.10)$$

Здесь

$$\tilde{f}_i^n = \tau_{n+1} (A_\alpha f^{n+\theta})_i + \left[\alpha + \frac{1}{2}(1 - \theta)C^{n+1} \right] v_{i-1}^n + (1 - 2\alpha)v_i^n + \left[\alpha - \frac{1}{2}(1 - \theta)C^{n+1} \right] v_{i+1}^n; \quad (7.11)$$

$$\tilde{f}_N^n = \tau_{n+1} f_{N-1+\sigma}^{n+\theta} + [1 - \sigma + (1 - \theta)C^{n+1}] v_{N-1}^n + [\sigma - (1 - \theta)C^{n+1}], \quad C^{n+1} = a \frac{\tau_{n+1}}{h}.$$

Равенства (7.9)–(7.10) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей вида

$$a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -d_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (7.12)$$

где

$$a_1 = 0, \quad -c_1 = 1 - 2\alpha, \quad b_1 = \left(\alpha + \frac{1}{2}\theta^{n+1} \right), \quad -d_1 = \tilde{f}_1^n - \left(\alpha - \frac{1}{2}\theta^{n+1} \right) g(t_{n+1}), \quad (7.13)$$

$$a_i = \alpha - \frac{1}{2}\theta^{n+1}, \quad -c_i = 1 - 2\alpha, \quad b_i = \alpha + \frac{1}{2}\theta^{n+1}, \quad -d_i = \tilde{f}_i^n, \quad i = 2, \dots, N-1, \quad (7.14)$$

$$a_N = (1 - \sigma - \theta^{n+1}), \quad -c_N = \sigma + \theta^{n+1}, \quad b_N = 0, \quad -d_N = \tilde{f}_N^n. \quad (7.15)$$

Матрица A_1 системы (7.12) изображена на рис. 3а

$$A_1 = \begin{pmatrix} -c_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & -c_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1} & -c_{N-1} & b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_N & -c_N \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -c_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ a_2 & -c_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1} & -c_{N-1} & b_{N-1} \\ b_N & 0 & 0 & \dots & 0 & a_N & -c_N \end{pmatrix}.$$

Рис. 3б

Как уже указывалось в §1, системы с матрицами указанного типа эффективно решаются методом прогонки, требующим для своей реализации $8N$ арифметических операций. Таким образом, схема (7.4)–(7.6), (6.32) является экономичной при любых α, θ и σ .

Точно так же сравнительно просто, решается вопрос о реализации второй разностной схемы (аппроксимирующей периодическую краевую задачу). А именно, эта схема имеет вид системы (7.11), где i принимает значения $1, 2, \dots, N$, причем в силу периодичности выполняются равенства

$$v_0^{n+1} = v_N^{n+1}, \quad v_1^{n+1} = v_{N+1}^{n+1}. \quad (7.16)$$

С учетом (7.15) указанную систему можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} a_1 y_N - c_1 y_1 + b_1 y_2 &= -d_1, \\ a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} &= -d_i, \quad i = 2, 3, \dots, N-1, \\ a_N y_{N-1} - c_N y_N + b_N y_1 &= -d_N. \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

Здесь коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i определяются формулами (7.13), где i принимает значения $1, 2, \dots, N$, с учетом условий (7.16). Матрица A_2 этой системы имеет вид, изображенный на рис. 3б. Присутствие отличных от нуля членов в правом верхнем и левом нижнем углах матрицы A_2 не позволяет решать систему (7.17) обычным методом прогонки. Тем не менее, используя структуру матрицы A_2 , систему (7.17) удастся решить методом так называемой *циклической прогонки*, требующим $14N - 8$ арифметических операций. Подробное изложение и исследование устойчивости указанного метода можно найти в [14, с. 86].

7.3. Исследование устойчивости разностной схемы для периодической краевой задачи энергетическим методом. В этом пункте, следуя работе [1], выведем достаточные условия устойчивости разностной схемы (7.2), (6.32), (7.8), аппроксимирующей периодическую краевую задачу (6.1а), (6.2), (7.7). Отметим прежде, что для точного решения u указанной задачи при $q(x, t) \geq 0$ справедлива априорная оценка (6.18), которая устанавливается с использованием периодичности реше-

ния, а соответствующий закон сохранения (6.19) при $q(x, t) = 0$ имеет вид

$$\|u(\cdot, t)\|^2 \equiv \int_0^l u^2(x, t) dx = \int_0^l \varphi^2(x) dx \quad \forall t \in [0, T]. \quad (7.18)$$

Равенство (7.18) означает, что энергия $\|u(\cdot, t)\|^2$ рассматриваемой системы остается постоянной с изменением времени, что является следствием условия периодичности (7.7). Ниже считаем, что $q = q(t) \geq 0$.

Для исследования устойчивости рассматриваемой разностной схемы введем N – мерное евклидово пространство $H_N = \{v = (\dots, -v_1, v_0, v_1, \dots, v_N, v_{N+1}, \dots), v_{i+N} = v_i\}$, состоящее из периодических сеточных функций v с периодом N , со скалярным произведением и нормой

$$(v, w) = \sum_{i=1}^N v_i w_i h, \quad \|v\|^2 = (v, v) \quad \forall v, w \in H_N. \quad (7.19)$$

Рассмотрим в пространстве H_N два оператора A_α и D , действующие по формуле

$$(A_\alpha v)_i = \alpha v_{i-1} + (1 - 2\alpha)v_i + \alpha v_{i+1}, \quad (7.20)$$

$$(Dv)_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h}, \quad v \in H_N, \quad i = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad (7.21)$$

Легко проверить, что

$$(A_\alpha v, w) = (v, A_\alpha w), \quad (Dv, v) = 0, \quad \forall v, w \in H_N, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (7.22)$$

Это означает, что оператор A_α является самосопряженным, а D – кососимметричным в H_N . Более того, нетрудно убедиться, что при $\alpha < 1/4$ оператор A_α удовлетворяет условию

$$(A_\alpha v, v) \geq (1 - 4\alpha)\|v\|^2 \quad \forall v \in H_N \quad (7.23)$$

и, следовательно, является положительным в H_N при $\alpha < 1/4$. Ввиду этого при $\alpha < 1/4$ в пространстве H_N можно ввести “энергетическое” скалярное произведение и норму

$$(v, w)_\alpha = (A_\alpha v, w), \quad \|v\|_\alpha^2 = (v, v)_\alpha = (A_\alpha v, v). \quad (7.24)$$

Пространство H_N с так введенным скалярным произведением обозначим через H_N^α . Используя H_N^α , введем два основных пространства двумерных сеточных функций

$$U_{h\tau} = C[\overline{\omega^\tau}; H_N^\alpha] = \{v^{h\tau} : v^{h\tau}(t_n) \equiv v^n \in H_N^\alpha, \quad n = 0, 1, \dots, M\} \quad (7.25)$$

$$F_{h\tau} = L^1(\omega^\tau; H_N^\alpha) = \{f^{h\tau} : f^{h\tau}(t_n) \in H_N^\alpha, \quad n = 1, 2, \dots, M\} \quad (7.26)$$

с нормами

$$\|v^{h\tau}\|_{U_{h\tau}} = \max_{0 \leq n \leq M} \|v^n\|_\alpha, \quad \|f^{h\tau}\|_{F_{h\tau}} = \sum_{n=1}^M \|f^{h\tau}(t_n)\|_\alpha \tau_n \quad (7.27)$$

и запишем схему (7.2), (6.32), (7.8) в следующем операторном виде

$$A_\alpha \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau_{n+1}} + aDv^{n+\theta} + q^{n+\theta} A_\alpha v^{n+\theta} = A_\alpha f^{h\tau}(t_{n+1}) \equiv A_\alpha f^{n+\theta}, \quad (7.28)$$

$$v^{h\tau}|_{t=0} \equiv v^0 = \varphi^h; \quad v^{h\tau} \in U_{h\tau}, f^{h\tau} \in F_{h\tau}, \varphi^h \in H_N^\alpha. \quad (7.29)$$

Дальше будем действовать так же, как и в п. 5.6 при исследовании устойчивости схемы (1) энергетическим методом. А именно, умножим уравнение (7.28) скалярно на $v^{n+\theta}$, т.е. умножим (7.2) на $v_i^{n+\theta} h$ и просуммируем по i от 1 до N . Учитывая (7.22) и (7.24), получим

$$\begin{aligned} \theta \|v^{n+1}\|_\alpha^2 + (1 - 2\theta)(v^{n+1}, v^n)_\alpha - (1 - \theta) \|v^n\|_\alpha^2 + \tau_{n+1} q^{n+\theta} \|v^{n+\theta}\|_\alpha^2 = \\ = \tau_{n+1} [(1 - \theta)(f^{n+\theta}, v^n)_\alpha + \theta(f^{n+\theta}, v^{n+1})_\alpha]. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Предполагая, что $\theta \geq 1/2$, и применяя неравенство Коши к скалярным произведениям в (7.30), приходим с учетом условия $q \geq 0$ к неравенству

$$\begin{aligned} \theta \|v^{n+1}\|_\alpha^2 + [(1 - 2\theta) \|v^n\|_\alpha - \tau_{n+1} \theta \|f^{n+\theta}\|_\alpha] \|v^{n+1}\|_\alpha - \\ - (1 - \theta) \|v^n\|_\alpha (\|v^n\|_\alpha + \tau_{n+1} \|f^{n+\theta}\|_\alpha) \leq 0, \end{aligned} \quad (7.31)$$

в точности совпадающему с неравенством (6.64), полученным в §6. Поэтому в силу результатов §6 из (7.31) следует, что

$$\|v^{n+1}\|_\alpha \leq \|v^n\|_\alpha + \tau_{n+1} \|f^{n+\theta}\|_\alpha. \quad (7.32)$$

Отсюда так же, как и в §6, приходим к неравенству

$$\|v^{n+1}\|_\alpha \leq \|\varphi^h\|_\alpha + \sum_{m=0}^n \|f^{m+\theta}\|_\alpha \tau_{m+1},$$

откуда следует оценка

$$\|v^{h\tau}\|_{U_{h\tau}} \leq \|\varphi^h\|_\alpha + \|f^{h\tau}\|_{F_{h\tau}}, \quad (7.33)$$

означающая абсолютную устойчивость схемы (7.28), (7.29) при

$$\alpha < 1/4, \quad \theta \geq 1/2. \quad (7.34)$$

При $f = q = 0$ и $\theta = 1/2$ из (7.30) следует, что

$$\|v^{n+1}\|_\alpha = \|v^n\|_\alpha = \dots = \|v^0\|_\alpha = \|\varphi\|_\alpha. \quad (7.35)$$

Таким образом, схема (7.28), (7.29) аппроксимирующая периодическую задачу (6.1a), (6.2), (7.7) является абсолютно устойчивой при выполнении условий (7.34) разностной схемой, имеющей глобальный порядок аппроксимации (7.3). Причем при $\theta = 1/2$ указанная схема является консервативной в том смысле, что для нее выполняется разностный аналог (7.5) закон сохранения (7.18).

Аналогичным образом можно показать устойчивость схемы

$$\begin{aligned} \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} + a \frac{v_{i+1}^{n+\theta} - v_{i-1}^{n+\theta}}{2h} &= f_i^{n+\theta}, \quad i = 1, 3, \dots, N-1; \quad (N = 2L, L \in \mathcal{N}); \\ \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} + a \frac{v_{i+1}^{n+\theta} - v_{i-1}^{n+\theta}}{h} - a \frac{v_{i+2}^{n+\theta} - v_{i-2}^{n+\theta}}{4h} &= f_i^{n+\theta}, \quad i = 2, 4, \dots, N-2; \\ \frac{v_N^{n+1} - v_N^n}{\tau} + a \frac{v_{N-2}^{n+\theta} - 4v_{N-1}^{n+\theta} + 3v_N^{n+\theta}}{2h} &= f_N^{n+\theta}; \quad v_i^0 = \varphi^h(x_i), v_0^n = 0, \end{aligned}$$

аппроксимирующей непериодическую задачу (6.1a)–(6.3) при $N = 2L$ с порядком $O(h^2 + \tau^s)$. При $\theta = \frac{1}{2}$ указанная схема подробно исследована в [3].

Глава 4. Разностные схемы для уравнений 2-го порядка

В §§8–11 исследуются разностные схемы для простейших дифференциальных уравнений математической физики 2-го порядка: одномерного уравнения теплопроводности, одномерного волнового уравнения и двумерного уравнения Пуассона. Как и выше, основные идеи поясняются на обыкновенном дифференциальном уравнении.

§8. Обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

8.1. Простейшая краевая задача. Пусть требуется найти методом сеток приближенное решение простейшей краевой задачи для уравнения 2-го порядка:

$$Lu \equiv u''(x) = f(x), \quad x \in (0, l). \quad (8.1)$$

$$u(0) = g_1, \quad u(l) = g_2. \quad (8.2)$$

С этой целью введем на интервале $[0, l]$ равномерную для простоты разностную сетку:

$$\overline{\omega^h} = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad h = l/N\}, \quad \omega^h = \overline{\omega^h} / \{0, l\}. \quad (8.3)$$

Рассмотрим сначала простейшую разностную схему на трехточечном шаблоне (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) :

$$\Lambda_h v(x) \equiv v_{\overline{xx}}(x) = f^h(x) = f(x), \quad x \in \omega^h; \quad (8.4)$$

$$v_0 = g_1, \quad v_N = g_2. \quad (8.5)$$

Поскольку разностная производная $v_{\overline{xx}}$ аппроксимирует производную v'' со вторым порядком на гладкой функции $v \in C^4$, то естественно ожидать, что разностное уравнение (8.4) имеет порядок $O(h^2)$ на гладком решении $u \in C^4[0, l]$. Чтобы показать это, подсчитаем невязку $\delta f^h = v_{\overline{xx}} - f^h$. Используя формулу Тейлора вида (1.15) имеем с учетом равенства $u''(x) = f(x)$, что

$$\delta f^h(x) = u''(x) + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(x) - f(x) = O(h^2), \quad u \in C^4. \quad (8.6)$$

Формула (8.6) и означает, что локальный порядок аппроксимации уравнения (8.4) равен $O(h^2)$ для $u \in C^4$. Поскольку условия (8.5) аппроксимируют краевые условия (8.2) абсолютно точно, то стандартным образом показывается, что глобальный порядок аппроксимации схемы (8.4), (8.5) совпадает с локальным порядком $O(h^2)$.

Наконец, из трехточечности уравнения (8.4) вытекает, что схема (8.4), (8.5) реализуется методом прогонки и, следовательно, является экономичной.

Аппроксимируя производную $u''(x)$ с более высоким порядком, можно построить схемы повышенного порядка точности. Так, например, используя аппроксимацию (1.24) четвертого порядка точности, приходим к схеме

$$v_{\bar{x}x}(x) - \frac{h^2}{12}v_{\bar{x}x\bar{x}x}(x) = f^h(x), \quad (8.7)$$

аппроксимирующей уравнение (8.1) с порядком $O(h^4)$. Однако, в отличие от (8.4), схему (8.7) нельзя использовать в приграничных узлах x_1 и x_{N-1} . Поэтому при таком подходе возникает проблема аппроксимации уравнения (8.1) в узлах x_1, x_{N-1} с тем же порядком $O(h^4)$. Если же в узлах x_1, x_{N-1} использовать схему (8.4), имеющую порядок $O(h^2)$, то глобальный порядок полученной таким образом схемы будет равен $O(h^{5/2})$. Это можно показать так же как в §4 с использованием тех же пространств U_h и F_h . Поэтому в этом случае фактически теряет смысл использование (8.7) в остальных внутренних узлах. Наконец, отметим, что при использовании аппроксимаций (8.4) и (8.7) возникают трудности с реализацией и исследованием сходимости построенной схемы из-за ее неоднородности.

Другой путь построения схемы повышенной точности заключается в том, чтобы, оставляя неизменной левую часть уравнения (8.4) подправлять нужным образом (с учетом выражения (8.6) для невязки δf^h) правую часть в (8.4). Добавляя, например, к ней $(h^2/12)f''(x)$, приходим к схеме

$$v_{\bar{x}x}(x) = f^h(x) = f(x) + \frac{h^2}{12}f''(x), \quad x \in \omega^h, \quad (8.8)$$

аппроксимирующей уравнение (8.1) с порядком $O(h^4)$. Действительно, вычисляя для схемы (8.8) невязку δf^h , имеем

$$\delta f^h(x) = u''(x) - f(x) + \frac{h^2}{12}[u^4(x) - f''(x)] = O(h^4), \quad u \in C^6. \quad (8.9)$$

Схема (8.8) не совсем удобна, поскольку она содержит производную $f''(x)$. С вычислительной точки зрения удобнее заменить ее разностной аппроксимацией $f_{\bar{x}x}$ с учетом формулы

$$f''(x) = f_{\bar{x}x}(x) + O(h^2), \quad f \in C^4. \quad (8.10)$$

В результате приходим к разностной схеме

$$v_{\bar{x}x}(x) = f(x) + \frac{h^2}{12}f_{\bar{x}x}(x) = \frac{f(x-h) + 10f(x) + f(x+h)}{12}, \quad x \in \omega^h, \quad (8.11)$$

имеющей в силу (8.9), (8.10) порядок $O(h^4)$. При этом, в отличие от (8.7) схему (8.11) уже можно использовать и в приграничных узлах x_1, x_{N-1} , поскольку она является

трехточечной, причем глобальный порядок аппроксимации схемы (8.11), (8.5) равен $O(h^4)$. Следует отметить, что таким путем можно построить трехточечные разностные схемы любого порядка аппроксимации. В частности, схема порядка $O(h^6)$ имеет вид:

$$v_{\bar{x}x}(x) = f^h(x) = f(x) + \frac{h^2}{12}f''(x) + \frac{h^4}{360}f^{(4)}(x), \quad x \in \omega^h.$$

Наряду со схемой (8.11) будем также рассматривать схему (точнее, однопараметрическое семейство разностных схем)

$$v_{\bar{x}x}(x) = f(x) + \alpha h^2 f_{\bar{x}x}(x), \quad x \in \omega^h, \quad (8.12)$$

имеющую при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ порядок $O(h^2)$ на решении $u \in C^4[0, l]$ и переходящую в схему (8.4) при $\alpha = 0$ и в схему (8.11) при $\alpha = 1/12$. Последнее позволяет сделать вывод, что схема (8.12), имеющая в индексных обозначениях вид

$$(\Lambda_A v)_i = \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = f_i^h = (A_\alpha f)_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (8.13)$$

где

$$(A_\alpha f)_i = \alpha f_{i-1} + (1 - 2\alpha)f_i + \alpha f_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (8.14)$$

фактически имеет порядок $O(h^{r(\alpha)})$ на решении $u \in C^{r(\alpha)+2}[0, l]$ где,

$$r(\alpha) = \begin{cases} 2, & \alpha \neq 1/12, \\ 4, & \alpha = 1/12. \end{cases} \quad (8.15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае, если рассматриваемое дифференциальное уравнение имеет вид

$$u''(x) + q(x)u = f(x), \quad (8.1a)$$

где $q(x)$ – заданная функция, аналогом (8.13) является схема

$$\frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} + (A_\alpha(qv))_i = (A_\alpha f)_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (8.13a)$$

также имеющая локальный порядок аппроксимации $O(h^{r(\alpha)})$. Случай более сложных уравнений с переменными коэффициентами, как самосопряженных $(pu')' + qu = f$, так и несамопряженных $pu'' + ru' + qu = f$ требует более детального изучения (см., например [13, с. 100]).

8.2. Третья краевая задача. Рассмотрим уравнение (8.1) или (8.1a) при более сложных краевых условиях, чем (8.2), например: $u(l) = g_2$,

$$Bu \equiv u'(0) + \sigma u(0) = g_1. \quad (8.16)$$

Краевое условие $u(l) = g_2$, как и выше аппроксимируем абсолютно точно $v_N = g_2$. Для аппроксимации (8.16) заменим производную $v'(0)$ правой разностной производной $v_x(0) = (v_1 - v_0)/h$ и запишем соответствующее краевое условие при $x = 0$ в виде

$$B_h v \equiv v_x(0) + \sigma v_0 = g_1, \quad (8.17)$$

где оператор B_h определен на двухточечном шаблоне $(0, h)$.

Определим порядок аппроксимации граничного условия (8.17). С этой целью рассмотрим невязку граничного условия

$$\delta g_1^h \equiv B_h u^h - g_1 = u_x(0) + \sigma u_0 - g_1. \quad (8.18)$$

Используя разложение (1.15), имеем

$$\delta g_1^h = u'(0) + \frac{h}{2}u''(0) + \frac{h^2}{6}u'''(0) + O(h^3) + \sigma u_0 - g_1 = O(h), \quad u \in C^2. \quad (8.19)$$

Из (8.19) следует, что разностное граничное условие (8.17) имеет порядок аппроксимации $O(h)$. Рассуждая дальше так же, как в §4 можно показать, что глобальный порядок аппроксимации соответствующей разностной схемы равен $O(h)$ при любом α . Поскольку порядок $O(h)$ невысок, то естественно возникает вопрос о повышении порядка аппроксимации граничного условия (8.16), а следовательно, и всей схемы в целом. Для этого можно предложить два пути, аналогичных изложенным в п.1 для повышения порядка аппроксимации дифференциального уравнения (8.1). Первый путь заключается в использовании правосторонней аппроксимации производной $v'(x)$ более высокого порядка. Применяя, в частности, аппроксимацию (1.18) 2-го порядка, приходим к разностному краевому условию

$$\frac{-3v_0 + 4v_1 - v_2}{2h} + \sigma v_0 = g_1, \quad (8.20)$$

аппроксимирующему (8.16) с порядком $O(h^2)$. Однако в отличие от (8.17) разностный граничный оператор в (8.20) определен на трехточечном шаблоне (x_0, x_1, x_2) , что в общем случае может усложнить реализацию и сходимость всей схемы в целом.

Другой путь повышения аппроксимации граничного условия заключается в соответствующем исправлении правой части (8.17) при неизменной левой части с учетом выражения (8.1) для невязки δg_1^h . Добавляя, например, к правой части (8.17) член $(h/2)f(0)$, получим разностное граничное условие

$$B_h v \equiv v_x(0) + \sigma v_0 = g_1 + \frac{h}{2}f(0), \quad (8.21)$$

аппроксимирующее (8.16) уже с порядком $O(h^2)$ на решении $u \in C^3[0, l]$.

Действительно, вычисляя невязку δg_1^h , имеем

$$\delta g_1^h = B_h u - g_1 - \frac{h}{2} f(0) = [u'(0) + \sigma u_0 - g_1] + \frac{h}{2} [u''(0) - f(0)] + O(h^2) = O(h^2).$$

Для уравнения (8.1а) “исправленное” граничное условие порядка $O(h^2)$ имеет вид

$$v_x(0) + \sigma v_0 = g_1 + \frac{h}{2} f(0) - \frac{h}{2} q(0)v(0). \quad (8.22)$$

Ясно, что этот способ повышения аппроксимации граничного условия предпочтительнее первого, поскольку при этом не происходит увеличения шаблона граничного оператора. В случае уравнения (8.1) таким путем можно получить разностное граничное условие любого порядка аппроксимации. Так, например, граничное условие третьего порядка имеет с учетом (8.19) вид

$$v_x(0) + \sigma v_0 = g_1 + \frac{h}{2} f(0) + \frac{h^2}{6} f'(0). \quad (8.23)$$

8.3. Исследование устойчивости первой краевой задачи методом энергетических неравенств. Рассмотрим схему (8.13), (8.5), аппроксимирующую краевую задачу (8.1), (8.2) с порядком $O(h^r)$ на решении $u \in C^{r+2}[0, l]$. Для простоты краевые условия будем считать однородными:

$$v_0 = u(0) = 0, \quad v_N = u(l) = 0. \quad (8.5a)$$

Этого всегда можно добиться путем введения новой неизвестной функции. Тем самым мы исследуем устойчивость схемы по правой части f^h уравнения (8.13). Исследование устойчивости в общем случае, т.е. по правой части и граничным условиям всех трех типов для уравнений с переменными коэффициентами детально изучено в [13, гл. 5].

Рассмотрим введенное в §1 пространство H_{N+1} сеточных функций v^h на сетке (8.3) и его подпространство $\overset{\circ}{H}_{N-1}$ со скалярным произведением и нормой (1.6) и (1.5) соответственно. Условия (8.5а) означают, очевидно, что $v \in \overset{\circ}{H}_{N-1}$. Полагая

$$(\Lambda_h v)_0 = (\Lambda_h v)_N = 0, \quad (A_\alpha f)_0 = (A_\alpha f)_N = 0, \quad (8.24)$$

можно считать, что оператор Λ_h действует в пространстве $\overset{\circ}{H}_{N-1}$, а оператор A_α — из пространства H_{N+1} в $\overset{\circ}{H}_{N-1}$.

Умножим (8.13) на v_i и просуммируем по i от 1 до $N-1$. Учитывая обозначения (1.6), будем иметь

$$(\Lambda_h v, v) = (A_\alpha f, v). \quad (8.25)$$

Применяя к левой части (8.25) формулу Грина (3.16), а к правой части неравенство Коши и оценку (3.22), получаем

$$(v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}}) = \|v_{\bar{x}}\|^2 \leq \|A_\alpha\| \cdot |[f]| \cdot \|v\| \leq \|A_\alpha\| \cdot |[f]| \frac{l}{\sqrt{8}} \|v_{\bar{x}}\|.$$

Сокращая на выражение $\|v_{\bar{x}}\| \neq 0$, приходим к оценке

$$\|v_{\bar{x}}\| \leq \frac{l}{\sqrt{8}} \|A_\alpha\| \cdot |[f]|, \quad (8.26)$$

где

$$|[f]|^2 = \|f\|_{H_{N+1}}^2 = \sum_{i=1}^{N-1} f_i^2 h + \frac{1}{2}(f_0^2 + f_N^2)h,$$

означающей устойчивость решения задачи (8.13), (8.5a) в норме. Из оценки (8.26) и неравенств (3.21), (3.22) в свою очередь легко вытекают оценки:

$$\|v\| \leq \frac{l^2}{8} \|A_\alpha\| \cdot |[f]|; \quad \|v\|_C \leq \frac{l\sqrt{l}}{4\sqrt{2}} \|A_\alpha\| \cdot |[f]|, \quad (8.27)$$

означающие устойчивость решения в евклидовой и равномерной метриках. При $d = 0$ оператор A_0 становится тождественным оператором, так что $\|A_0\| = 1$. Можно также показать, что $\|A_\alpha\| \leq 1$ при $\alpha > 0$. С учетом этого первая оценка в (8.27) принимает следующий вид

$$\sum_{i=1}^{N-1} v_i^2 h \leq \frac{l^4}{64} \sum_{i=1}^{N-1} f^2(x_i)h, \quad \alpha = 0, \quad (8.28)$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} v_i^2 h \leq \frac{l^4}{64} \sum_{i=1}^{N-1} f^2(x_i)h + \frac{1}{2}(f_0^2 + f_N^2)h, \quad \alpha > 0. \quad (8.29)$$

Важно отметить, что любая из оценок (8.26)–(8.29) влечет за собой не только устойчивость, но и корректность схемы (8.13), (8.5a). Действительно, в силу этих оценок правой части $f = 0$ отвечает единственное решение $v \equiv 0$. Поскольку (8.13), (8.5a) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей порядка $N - 1$, то это означает, что ее определитель отличен от нуля. Отсюда следует, в свою очередь, что для любой правой части f решение задачи (8.13), (8.5a) существует и единственно. Наконец отметим, что поскольку схема (8.13), (8.5a) аппроксимирует задачу (8.1), (8.2) с порядком $O(h^r)$ на решении $u \in C^{r+2}[0, l]$, то из оценок (8.26)–(8.29) вытекает ее сходимость, причем в силу теоремы 1 §2 сходимость имеет тот же порядок $O(h^r)$.

§9. Двухслойные трехточечные разностные схемы для уравнения теплопроводности

9.1. Постановка задачи. Свойства точного решения. Математическое моделирование ряда физических процессов, и, в частности, теплопроводности, или диффузии в среде, намагничивания вещества и т.д., приводит к необходимости решения начально-краевых задач для уравнений параболического типа. Простейшим представителем этого класса уравнений является так называемое *уравнение теплопроводности*

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t) \quad \text{в } Q = (0, l) \times (0, T), \quad (9.1)$$

которое мы будем рассматривать при следующих начальных и краевых условиях:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in (0, l), \quad (9.2)$$

$$u|_{x=0} = g_1(t), \quad u|_{x=l} = g_2(t), \quad t \in (0, T). \quad (9.3)$$

Здесь f, φ, g_1, g_2 – заданные функции, $a = \text{const}$. При $g_1 = g_2 = 0$ (9.1)–(9.3) описывает, в частности, распределение температуры в однородном стержне длины l под действием источников тепла с плотностью f при условии, что на концах $x = 0$ и $x = l$ поддерживается нулевая температура, а начальная температура стержня равна $\varphi(x)$.

Из общей теории дифференциальных уравнений известно, что при некоторых естественных условиях на исходные данные (состоящих из требований на их гладкость и условий согласования) решение задачи (9.1)–(9.3) существует, единственно и непрерывно зависит от исходных данных. Указанное решение можно найти в явном виде, применяя, например, метод Фурье (метод разделения переменных), поскольку задача (9.1)–(9.3) допускает разделение переменных [15, с. 200]. В частном случае, когда

$$f(x, t) = 0, \quad g_1(t) = g_2(t) = 0, \quad (9.4)$$

соответствующее представление решения задачи (9.1)–(9.3), полученное методом Фурье, имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-a^2 \lambda_k t} w_k(x). \quad (9.5)$$

Здесь C_k – постоянные, определяемые по функции φ формулами

$$C_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) w_k(x) dx, \quad (9.6)$$

λ_k и $w_k(x)$ – собственные значения и собственные функции задачи

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad u(0) = u(l) = 0, \quad (9.7)$$

определяемые формулами

$$\lambda_k = \nu_k^2 = (k\pi/l)^2, \quad w_k(x) = \sin \nu_k x = \sin(k\pi/l)x. \quad (9.8)$$

Функция

$$u_k(x, t) = C_k e^{-a^2 \lambda_k t} w_k(x) = C_k e^{-\frac{a^2 k^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (9.9)$$

входящая в (9.5) в качестве k -го члена ряда, называется *гармоникой*. При этом число $\nu_k = \frac{k\pi}{l}$ называется *частотой*, а величина

$$q_k(t) = C_k e^{-a^2 \lambda_k t} \quad (9.10)$$

амплитудой гармоник u_k .

Из формулы (9.10) следует, что амплитуда $q_k(t)$ k -й гармоник экспоненциально убывает с ростом t , причем тем быстрее, чем выше номер k . При этом, поскольку

$$q_k(t + \tau) q_k(t) e^{-a^2 \lambda_k \tau} \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad (9.11)$$

то величина

$$e^{-a^2 \lambda_k \tau} \quad (9.12)$$

имеет смысл коэффициента затухания амплитуды k -й гармоник за время τ . Формула (9.5) при такой интерпретации функций $u_k(x, t)$ означает, что точное решение задачи (9.1)–(9.3) содержит при $f = 0$, $g_1 = g_2 = 0$ бесчисленное множество затухающих гармоник u_k , причем каждая гармоника u_k затухает с ростом t независимо от поведения других.

9.2. Построение разностной схемы. Для построения разностной схемы, аппроксимирующей задачу (9.1)–(9.3), введем в области Q разностную сетку $\bar{\omega}^{h\tau_0}$ узлами

$$(x_i, t_n), \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad n = 0, 1, \dots, M, \quad (9.13)$$

причем для простоты сетку будем считать равномерной по x :

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad h = l/N.$$

Рассмотрим следующее двухпараметрическое семейство разностных схем, аппроксимирующих уравнение (9.1):

$$\left(A_\alpha \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau_{n+1}} \right)_i - a^2 \frac{v_{i-1}^{n+\theta} - 2v_i^{n+\theta} + v_{i+1}^{n+\theta}}{h^2} = (A_\alpha f^{n+\theta})_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad n = 0, 1, \dots, M-1. \quad (9.14)$$

Естественно ожидать с учетом полученных ранее результатов (и в этом легко убедиться, используя разложение решения по формуле Тейлора), что схема (9.14) имеет

локальный порядок $O(h^r + \tau^s)$ на решении $u \in C^{r+2,s+1}(\overline{Q})$. Здесь величины $r = r(\alpha)$ и $s = s(\theta)$ определяются соответственно формулами (8.14) и (4.5). Семейство (9.14) аналогично семейству (7.2) для уравнения переноса, но в отличие от него имеет наивысший (для шаблона $\omega_{i-1,i+1}^{n,n+1}$) порядок $O(h^4 + \tau^2)$ при $\alpha = 1/12$ и $\theta = 1/2$.

Аппроксимируя далее начальные и краевые условия (9.2), (9.3) абсолютно точно соответствующими разностными условиями

$$v_i^0 = \varphi_i^h \equiv \varphi(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (9.15)$$

$$v_0^{n+1} = g(t^{n+1}), \quad v_N^{n+1} = g(t^{n+1}); \quad n = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (9.16)$$

и приписывая разностное уравнение (9.14) к узлу (x_i, t_{n+1}) , стандартным образом можно показать, что разностная схема (9.14)–(9.16) имеет глобальный порядок аппроксимации

$$O(h^{r(\alpha)} + \tau^{s(\theta)}) \quad \text{на решении } u \in C^{r+2,s+1}(\overline{Q}). \quad (9.17)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае более общего уравнения

$$u_t - a^2 u_{xx} + q(x, t)u = f(x, t), \quad (9.18)$$

где $q(x, t)$ – заданная функция, аналогом (9.14) является семейство

$$\left(A_\alpha \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau_{n+1}} \right)_i - a^2 \frac{v_{i-1}^{n+\theta} - 2v_i^{n+\theta} + v_{i+1}^{n+\theta}}{h^2} = (A_\alpha (f^{n+\theta} - q^{n+\theta} v^{n+\theta}))_i, \quad (9.19)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, \quad n = 0, 1, \dots, M-1,$$

имеющее тот же порядок аппроксимации (9.17).

9.3. Исследование устойчивости методом гармоник. В этом пункте мы рассмотрим схему (9.14)–(9.16) в случае, когда $f = 0$, $g_1 = g_2 = 0$ и приведем необходимые и достаточные условия устойчивости указанной схемы, используя разностный аналог метода Фурье решения дифференциальной задачи (9.1)–(9.3).

Как и в §1, введем в рассмотрение пространство \mathring{H}_{N-1} сеточных функций. Напомним, что в \mathring{H}_{N-1} можно ввести базис, состоящий из собственных функций задачи

$$v_{\overline{x}x} = -\lambda v, \quad v \in \mathring{H}_{N-1}, \quad (9.20)$$

которые вместе с собственными значениями определяются формулами

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi}{2l} h, \quad w_k = \sin \nu_k x = \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad \nu_k = \frac{k\pi}{l}. \quad (9.21)$$

Положив, как обычно $v^n(x) = v(x, t_n)$, заметим, что в силу (9.4) $v^n \in \mathring{H}_{N-1}$, $n = 0, 1, \dots, M$. Следовательно, v_{N-1}^n можно представить в виде

$$v^n = \sum_{k=1}^{N-1} q_k^n w_k, \quad \left(v(x, t) = \sum_{k=1}^{N-1} q_k(t) w_k(x) \right). \quad (9.22)$$

Здесь q_k^n – коэффициенты Фурье элемента v^n по системе $\{w_k\}$, определяемые в силу результатов §3 формулой $q_k^n = (2/l)(v^n, w_k)$, где согласно (1.6)

$$(v^n, w_k) = \sum_{i=1}^{N-1} v^n(x_i) w_k(x_i) h = \sum_{i=1}^{N-1} v(x_i, t_n) w_k(x_i) h.$$

При этом справедливо равенство Парсеваля

$$\|v^n\|^2 = \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{N-1} (q_k^n)^2, \quad n = 0, 1, \dots, M. \quad (9.23)$$

В частности, при $n = 0$

$$v^0 = \varphi^h = \sum_{k=1}^{N-1} q_k^0 w_k, \quad (9.24)$$

где $q_k^0 = \frac{2}{l}(\varphi^h, w_k)$, причем

$$\|\varphi^h\|^2 = \|v^0\|^2 = \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{N-1} (q_k^0)^2. \quad (9.25)$$

Поскольку φ^h – заданная функция в силу (9.15), то значения коэффициентов q_k^0 можно считать известными. Нашей целью является определение коэффициентов q_k^n при остальных значениях n .

Для определения коэффициентов q_k^n подставим (9.22) в однородное разностное уравнение (9.14), имеющее вид

$$\alpha \frac{v_{i-1}^{n+1} - v_{i-1}^n}{\tau_{n+1}} + (1 - 2\alpha) \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau_{n+1}} + \alpha \frac{v_{i+1}^{n+1} - v_{i+1}^n}{\tau_{n+1}} - a^2 v_{\bar{x}\bar{x}}^{n+\theta}(x_i) = 0.$$

Учитывая, что

$$v_i^n = \sum_{k=1}^{N-1} q_k^n w_k(x_i), \quad v_i^{n+1} = \sum_{k=1}^{N-1} q_k^{n+1} w_k(x_i), \quad w_{k\bar{x}\bar{x}}(x_i) = -\lambda_k w_k(x_i),$$

$$v_{\bar{x}\bar{x}}^n(x_i) = \sum_{k=1}^{N-1} q_k^n w_{k\bar{x}\bar{x}}(x_i) = -\sum_{k=1}^{N-1} q_k^n \lambda_k w_k(x_i),$$

после приведения подобных членов получим

$$\sum_{k=1}^{N-1} [2\alpha(q_k^{n+1} - q_k^n) \cos \nu_k h + (1 - 2\alpha)(q_k^{n+1} - q_k^n) + a^2 \tau_{n+1} (1 - \theta) \lambda_k q_k^n + a^2 \theta \tau_{n+1} \lambda_k q_k^{n+1}] w_k(x_i) = 0. \quad (9.26)$$

Равенство (9.26) в силу линейной независимости $w_k(x)$ возможно тогда и только тогда, когда равны нулю коэффициенты при $w_k(x_i)$. Приравнивая их к нулю приходим к соотношению

$$q_k^{n+1} = \xi_k^{n+1} q_k^n, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (9.27)$$

где

$$\xi_k^{n+1} = \frac{1 - 2\alpha + 2\alpha \cos \nu_k h + (\theta - 1)a^2 \lambda_k \tau_{n+1}}{1 - 2\alpha + 2\alpha \cos \nu_k h + \theta a^2 \lambda_k \tau_{n+1}} \quad (9.28)$$

Формула (9.27), аналогичная точной формуле (9.11), является искомой рекуррентной формулой, позволяющей определить все значения q_k^{n+1} сеточных функций $q_k(t)$ через начальные значения q_k^0 . Соответствующая формула для нахождения q_k^{n+1} по q_k^0 имеет вид

$$q_k^{n+1} = \xi_k^{n+1} \xi_k^n \dots \xi_k^1 q_k^0, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1, \quad n = 0, 1, \dots, M - 1. \quad (9.29)$$

При этом в случае равномерной по t сетки, когда $\tau_n = \tau = T/M$, $n = \overline{1, M}$, эта формула упрощается, поскольку $\xi_k^1 = \dots = \xi_k^M = \xi_k$, и имеет вид

$$q_k^{n+1} = (\xi_k)^{n+1} q_k^0, \quad k = 1, \dots, N - 1. \quad (9.30)$$

Здесь $(\xi_k)^{n+1}$ означает $(n + 1)$ -ю степень числа ξ_k .

Используя формулу (9.29) или (9.30), нетрудно теперь указать условия, при которых схема (9.14)–(9.16) является устойчивой по начальным данным. Проведем предварительно сравнительный анализ формулы (9.22) сеточного решения с формулой (9.5) точного решения дифференциальной задачи. Сеточную функцию

$$v_k(x, t) = q_k(t) w_k(x) = q_k(t) \sin \nu_k x, \quad (9.31)$$

являющуюся решением разностной задачи (9.14)–(9.16) при начальном условии $v_k^0 = q_k^0 w_k(x)$, будем называть *сеточной гармоникой*, отвечающей номеру k . При этом число $\nu_k = k\pi/l$ будем называть *частотой*, а $q_k(t)$ – *амплитудой* k -й гармоники. Формула (9.22) при такой интерпретации означает, что точное решение разностной задачи (9.14)–(9.16) состоит из конечного числа (равного $N - 1$, где $N = l/h$) гармоник, причем амплитуда каждой гармоники с ростом времени затухает (или растет) независимо от поведения других. Последнее является следствием линейности разностной задачи (9.14)–(9.16) и возможности разделения переменных в ней (так же, как и в случае точной задачи). В этом мы усматриваем некоторую аналогию между дифференциальной и разностной задачами. Однако на этом аналогия заканчивается и такие важные свойства как затухание амплитуды каждой гармоники точного решения с ростом времени и частоты в общем случае, т.е. при произвольных значениях θ и α , не имеют сеточных аналогов. Однако к этому следует стремиться, чтобы быть уверенным в том, что разностное решение качественно правильно передает особенности решения рассматриваемой задачи. Для того, чтобы исследовать вопрос, при каких условиях на θ и α разностное решение обладает сеточными аналогами указанных свойств точного решения, введем понятие устойчивости k -й гармоники.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Гармонику (9.31) назовем *устойчивой* и пространство $\overset{\circ}{H}_{N-1}$ по начальным данным $q_k^0(v_k^0)$, если существуют такие положительные числа h_0 и τ_0 и постоянная $D_k > 0$, что при $h < h_0, \tau < \tau_0$ и любом $n \leq M \leq T/\tau$ выполняется неравенство

$$|q_k^n| \leq D_k |q_k^0|, \quad (9.32)$$

эквивалентное в силу представления (9.31) неравенству

$$\|v_k(t_n)\| \leq D_k \|v_k^0\|. \quad (9.33)$$

Чтобы выяснить условия, при которых k -тая гармоника устойчива по начальным данным, обратимся к соотношению (9.29), связывающему значения амплитуды k -й сеточной гармоники на n -м и $(n+1)$ -м временных слоях. Коэффициент ξ_k^{n+1} называется *множителем перехода* или коэффициентом роста k -ой гармоники при переходе от n -го к $(n+1)$ -му временному слою (или просто *множителем перехода от слоя к слою* при $\tau_{n+1} = \tau_n = \tau$). Очевидно, он является сеточным аналогом коэффициента затухания (9.12) амплитуды k -й гармоники точного решения за время $\tau_{n+1} = t_{n+1} - t_n$. Поскольку указанный коэффициент строго меньше единицы при любых τ_{n+1} и k , то естественно потребовать от множителя перехода, чтобы он удовлетворял условию

$$|\xi_k^{n+1}| \leq 1, \quad n = 0, 1, \dots, M-1. \quad (9.34)$$

Нетрудно видеть, что условие (9.34) и даже более общее условие

$$|\xi_k^{n+1}| \leq 1 + C\tau_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, M-1, \quad (9.35)$$

где C – некоторая положительная постоянная, не зависящая от h, τ и n , является достаточным для устойчивости k -й гармоники по начальным данным. Действительно, при выполнении (9.35) из (9.29) приходим к неравенству

$$|q_k^{n+1}| \leq (1 + C\tau_1) \dots (1 + C\tau_{n+1}) |q_k^0| \leq e^{Ct_{n+1}} |q_k^0| \leq e^{CT} |q_k^0|,$$

которое очевидно означает устойчивость k -й гармоники.

Из устойчивости всех гармоник, т.е. из выполнения (9.32) при $k = 1, 2, \dots, N-1$ вытекает, в свою очередь, устойчивость самой разностной схемы (9.14)–(9.16) по начальным данным. В самом деле, если выполняется условие (9.32) при всех $k = 1, 2, \dots, N-1$, то тогда в силу (9.23) и (9.25) имеем

$$\|v^n\|^2 = \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{N-1} (q_k^n)^2 \leq \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{N-1} D_k^2 (q_k^0)^2 \leq D^2 \|\varphi^h\|^2$$

где $D = \max_{1 \leq k \leq N-1} D_k$. Отсюда следует неравенство

$$\|v^n\| \leq D\|\varphi^h\| \quad \forall n = 1, 2, \dots, M, \quad (9.36)$$

означающее устойчивость разностной схемы (9.14)–(9.16) по начальным данным. Тем самым нами установлен:

ПРИЗНАК УСТОЙЧИВОСТИ. Схема (9.14)–(9.16) устойчива по начальным данным, если для всех $k = 1, 2, \dots, N - 1$ выполняется (9.35). Одновременно нами установлен:

ПРИЗНАК НЕУСТОЙЧИВОСТИ. Если хотя бы для одного k величину ξ_k^{n+1} нельзя замораживать величиной $1 + C\tau_{n+1}$ при некотором фиксированном C , то схема (9.14)–(9.16) неустойчива.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в начальных данных имеется ошибка вида $\varepsilon \sin \nu_k x$ с указанным k . Тогда через n шагов она возрастет в $\xi_k^n \dots \xi_k^1$ раз, что по модулю больше величины $1 + C\tau_n$, где C – сколько угодно большое число. Неограниченный рост ошибки с ростом n означает по определению неустойчивости схемы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Постоянная C в (9.35) фактически не должна быть большой, иначе устойчивость будет слабой. Поэтому при проверке этого признака обычно полагают $C = 0$, т.е. рассматривают в качестве признака устойчивости условие (9.34).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Изложенный метод исследования устойчивости разностной схемы (9.14)–(9.16) называют методом *разделения переменных*, или методом *Фурье*, или методом *гармоник*. Как было показано выше, исследование устойчивости указанным методом сводятся к изучению поведения с ростом времени каждой гармоники, входящей в представление (9.22). Если при этом множитель перехода каждой гармоники удовлетворяет условию (9.34) или хотя бы (9.35), т.е. возрастает не быстрее линейной функции вида $1 + C\tau$ от временного шага τ , то схема устойчива по начальным данным. Наоборот, если условие (9.35) не выполняется хотя бы для одного k ни при каком C , то схема неустойчива. В этом смысле признак устойчивости разностной схемы, основанный на выполнении (или невыполнении) неравенства (9.35), можно считать необходимым и достаточным признаком устойчивости разностной схемы (9.14)–(9.16).

Следует, однако, отметить, что справедливость метода гармоник нами доказана в случае, когда разностная задача допускает возможность разделения переменных, т.е. возможность представления ее решения в виде (9.22). Если это условие не выполняется, то выполнение неравенства (9.35) является лишь необходимым условием устойчивости разностной схемы. Таким образом, в этом случае метод гармоник позволяет устанавливать лишь неустойчивость разностной схемы с помощью признака неустойчивости. При этом на практике в качестве гармоник берут не только функции вида

(9.31), но и такие функции, как $q_k(t)e^{j\nu_k x}$, $q_k(t)e^{jkx} \dots$. Отметим также, что согласно [12, с.327] из устойчивости схемы по начальным данным вытекает ее устойчивость по правой части. Это означает, что полученные выше результаты об устойчивости остаются справедливыми и для неоднородной схемы (9.14)–(9.16).

Вернемся теперь к формуле (9.28) для множителя перехода ξ_k^{n+1} , которую также можно переписать в виде

$$\xi_k^n = 1 - \frac{a^2 \lambda_k \tau_n}{1 - 2\alpha + 2\alpha \cos \nu_k h + \theta a^2 \lambda_k \tau_n}. \quad (9.37)$$

Укажем условия (на θ , α и τ_n), при которых ξ_k^n удовлетворяет условию (9.34), достаточному для устойчивости k -й гармоники. Из (9.37) следует, что первое необходимое условие заключается в том, чтобы знаменатель в (9.37) был положителен, т.е. чтобы

$$\begin{aligned} 1 - 2\alpha + 2\alpha \cos \nu_k h + \theta a^2 \lambda_k \tau_n &= 1 - 4\alpha \sin^2 \frac{\nu_k h}{2} + \theta a^2 \lambda_k \tau_n = \\ &= 1 - \alpha h^2 \lambda_k + \theta a^2 \lambda_k \tau_n > 0. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Ясно, что это условие заведомо выполняется при любом $\theta \in [0, 1]$, если $\alpha < 1/4$. Если же $\alpha \geq 1/4$, то (9.38) выполняется только, если

$$\theta > \frac{\alpha h^2}{a^2 \tau_n} - \frac{1}{a^2 \lambda_k \tau_n}. \quad (9.39)$$

Вторым необходимым условием для выполнения неравенства (9.34), является условие $\xi_k^n \geq -1$, которое в силу формулы (9.37) можно переписать в виде

$$2 - 2\alpha h^2 \lambda_k + (2\theta - 1)a^2 \lambda_k \tau_n > 0. \quad (9.40)$$

Из (9.40) приходим к следующему условию на θ :

$$\theta > 1/2 + \frac{\alpha h^2}{a^2 \tau_n} - \frac{1}{a^2 \lambda_k \tau_n}. \quad (9.41)$$

Поскольку неравенство (9.41) влечет за собой выполнение неравенства (9.39), то (9.41) является искомым условием (на параметры α , θ или шаги h , τ_n), обеспечивающим выполнение (9.34).

Для устойчивости схемы (9.14)–(9.16) неравенство (9.41) должно выполняться при всех $k = 1, 2, \dots, N - 1$. Поскольку

$$\lambda_k < \frac{4}{h^2} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_k} > \frac{h^2}{4}, \quad -\frac{1}{\lambda_k} < -\frac{h^2}{4}, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1,$$

то условие (9.41) заведомо выполняется при любых k , если

$$\theta \geq \frac{1}{2} + \frac{\alpha h^2}{a^2 \tau_n} - \frac{h^2}{4a^2 \tau_n} = \frac{1}{2} + \frac{(4\alpha - 1)h^2}{4a^2 \tau_n}. \quad (9.42)$$

Условие (9.42) и является искомым достаточным условием, обеспечивающим устойчивость схемы (9.14)–(9.16). При фиксированных значениях θ, α и h (9.42) представляет собой некоторое условие на шаг по времени τ_n . Это означает, что схема (9.14)–(9.16) является в общем случае условно устойчивой. Если же

$$\alpha \leq 1/4 \quad \text{и} \quad \theta \geq 1/2, \quad (9.43)$$

то условие (9.42) удовлетворяется при любых значениях шагов h и τ . Таким образом, в этом случае (9.14)–(9.16) представляет собой абсолютно устойчивую разностную схему. Указанный факт можно доказать и методом априорных оценок, проводя рассуждения, аналогичные тем, которые использовались при доказательстве устойчивости разностных схем для уравнения переноса в §§6,7.

9.4. Классификация двухслойных трехточечных разностных схем для уравнения теплопроводности. Рассмотрим семейство разностных схем (9.14) с точки зрения классификации их по основным свойствам (порядку аппроксимации, устойчивости и реализации на ЭВМ). Отметим прежде, что совокупность всех схем в (9.14) можно разбить на два класса. Первый класс состоит из явных схем, второй – из *неявных схем*. Указанные схемы отличаются друг от друга способом реализации на ЭВМ и условиями устойчивости. Явные схемы позволяют находить значения решения на последующем слое через значения на предыдущем по простым рекуррентным формулам, требующим сравнительно небольшого числа $O(N)$ арифметических операций. Все неявные разностные схемы, являясь трехточечными по x , реализуются методом прогонки (так же, как и трехточечные схемы для уравнения переноса), требующим примерно $8N$ арифметических операций (не считая операций для вычисления коэффициентов при неизвестных v_i^{n+1}). Таким образом, все схемы семейства (9.14) являются *экономичными*.

Для выделения явных и неявных разностных схем, считая для простоты $\tau_n = \tau$, положим $r = \frac{\tau a^2}{h^2}$ и, раскрывая выражения для $(A_\alpha v)_i$ и $v^{n+\theta}$, перепишем (9.14) в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} & (\alpha - r\theta)v_{i-1}^{n+1} + (1 - 2\alpha + 2r\theta)v_i^{n+1} + (\alpha - r\theta)v_{i+1}^{n+1} = \\ & = [\alpha + r(1 - \theta)]v_{i-1}^n + [(1 - 2\alpha) - 2r(1 - \theta)]v_i^n + [\alpha + r(1 - \theta)]v_{i+1}^n + \tau(A_\alpha f^{n+\theta})_i. \end{aligned} \quad (9.44)$$

Из (9.44) видно, что схема (9.14) является явной, если

$$\alpha = r\theta = \theta \frac{\tau a^2}{h^2}, \quad (9.45)$$

и неявной, если $\alpha \neq r\theta$. Соотношение (9.45) описывает связь между шагами h и τ при фиксированных значениях параметров α и θ , исключая случай, когда $\alpha = \theta = 0$. В последнем случае схема (9.14) является явной при любых значениях шагов h и τ .

Приведем теперь краткую классификацию и основные свойства наиболее известных разностных схем для уравнения (9.1). При этом, как и в §6, под порядком аппроксимации приводимых ниже схем будем понимать локальный порядок аппроксимации соответствующего разностного уравнения, определяемый из (9.17), который будем записывать в одной строке с разностным уравнением (справа от него).

1. Простейшая явная схема ($\alpha = \theta = 0$) имеет вид

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} - a^2 \frac{v_{i-1}^n - 2v_i^n + v_{i+1}^n}{h^2} = f_i^n, \quad O(h^2 + \tau), \quad (9.46)$$

или

$$v_i^{n+1} = rv_{i-1}^n + (1 - 2r)v_i^n + rv_{i+1}^n + \tau f_i^n. \quad (9.47)$$

В силу (9.42) схема условно устойчива, т.е. устойчива при

$$\theta \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4a^2\tau} \implies \tau \leq \frac{1}{2} \frac{h^2}{a^2}. \quad (9.48)$$

2. Явная схема повышенной точности ($\theta = 1/2, \alpha = 1/12, r = 1/6$) имеет вид

$$v_i^{n+1} = \frac{1}{6}(v_{i-1}^n + 4v_i^n + v_{i+1}^n) + \frac{\tau}{12}(f_{i-1}^{n+1/2} + 10f_i^{n+1/2} + f_{i+1}^{n+1/2}), \quad O(h^4 + \tau^2) \quad (9.49)$$

и устойчива, поскольку выполняются условия (9.43). Однако в силу условия $r = 1/6$ шаг τ жестко связан с h формулой $\tau = h^2/6a^2$.

3. Простейшая неявная схема ($\alpha = 0, \theta = 1$) имеет вид

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} - a^2 \frac{v_{i-1}^{n+1} - 2v_i^{n+1} + v_{i+1}^{n+1}}{h^2} = f_i^{n+1}, \quad O(h^2 + \tau), \quad (9.50)$$

или

$$-rv_{i-1}^{n+1} + (1 + 2r)v_i^{n+1} - rv_{i+1}^{n+1} = v_i^n + \tau f_i^{n+1} \quad (9.51)$$

и абсолютно устойчива, так как выполняется условие (9.43).

4. Схема Кранка-Николсона ($\alpha = 0, \theta = 1/2$) имеет вид

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} - a^2 \frac{v_{i-1}^{n+1/2} - 2v_i^{n+1/2} + v_{i+1}^{n+1/2}}{h^2} = f_i^{n+1/2}, \quad O(h^2 + \tau^2), \quad (9.52)$$

или

$$-rv_{i-1}^{n+1} + 2(1 + r)v_i^{n+1} - rv_{i+1}^{n+1} = rv_{i-1}^n + 2(1 - r)v_i^n + rv_{i+1}^n + 2\tau f_i^{n+1/2} \quad (9.53)$$

и абсолютно устойчива, поскольку выполняется условие (9.43).

5. Схема “с весами” ($\alpha = 0, \theta \geq 0$) имеет вид (9.14) при $\alpha = 0$ или

$$\theta rv_{i-1}^{n+1} + (1 + 2r\theta)v_i^{n+1} - \theta rv_{i+1}^{n+1} =$$

$$= r(1 - \theta)v_{i-1}^n + [1 - 2r(1 - \theta)]v_i^n + r(1 - \theta)v_{i+1}^n + \tau f_i^{n+\theta}, \quad O(h^2 + \tau^s(\theta)) \quad (9.54)$$

и устойчива согласно (9.42) при выполнении условия

$$\theta \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4a^2\tau} \implies \tau \leq \frac{h^2}{2a^2(1 - 2\theta)}. \quad (9.55)$$

При $\theta \geq 1/2$ указанная схема абсолютно устойчива. Отметим, что схемы (9.46), (9.50) и (9.52) являются частными случаями схемы (9.54), отвечающими соответственно значениям $\theta = 0$, $\theta = 1$ и $\theta = 1/2$. Схему (9.14), в свою очередь, можно считать обобщением схемы (9.54).

6. Схема максимальной точности ($\alpha = 1/12, \theta = 1/2$) имеет вид

$$(1 - 6r)v_{i-1}^{n+1} + (10 + 12r)v_i^{n+1} + (1 - 6r)v_{i+1}^{n+1} = \tau(f_{i-1}^{n+1/2} + 10f_i^{n+1/2} + f_{i+1}^{n+1/2}) + \\ + (1 + 6r)v_{i-1}^n + (10 - 12r)v_i^n + (1 + 6r)v_{i+1}^n, \quad O(h^4 + \tau^2) \quad (9.56)$$

и абсолютно устойчива, поскольку выполняется (9.43). Схему (9.56) можно считать наилучшей (в некотором смысле “оптимальной”) на гладких решениях разностной схемой, аппроксимирующей уравнение (9.1) на шеститочечном шаблоне $w_{i-1,i+1}^{n,n+1}$. О других разностных схемах для уравнения (9.1) можно прочитать, например, в [10, с.190].

§10. Трехслойная разностная схема для одномерного волнового уравнения

10.1. Постановка задачи. Построение разностной схемы. Рассмотрим в области $Q = (0, l) \times (0, T)$ начально-краевую задачу

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t) \quad \text{в } Q, \quad (10.1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in (0, l), \quad (10.2)$$

$$u|_{x=0} = g_1(t), \quad u|_{x=l} = g_2(t), \quad t \in (0, T) \quad (10.3)$$

для одномерного волнового уравнения (10.1), описывающего одномерные волновые процессы. Введем в области \bar{Q} равномерную по x и t сетку $\bar{\omega}^{h\tau}$ с узлами (9.13) и построим разностную схему для уравнения (10.1), используя метод разностного дифференцирования.

Пусть $(x_i, t_n) \in \omega^{h\tau}$ – произвольный узел. Аппроксимируя в узле (x_i, t_n) производные v_{tt} и v_{xx} разностными отношениями

$$v_{tt}(x_i, t_n) \approx \frac{v_i^{n+1} - 2v_i^n + v_i^{n-1}}{\tau^2}, \quad v_{xx}(x_i, t_n) = \frac{v_{i-1}^n - 2v_i^n + v_{i+1}^n}{h^2}, \quad (10.4)$$

а правую часть f – значением $f^h(x_i, t_n) = f(x_i, t_n) \equiv f_i^n$, приходим к следующей схеме

$$\frac{v_i^{n-1} - 2v_i^n + v_i^{n+1}}{\tau^2} - a^2 \frac{v_{i-1}^n - 2v_i^n + v_{i+1}^n}{h^2} = f_i^n, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad n = 1, 2, \dots, M-1. \quad (10.5)$$

Отметим, что для аппроксимации уравнения (10.1) в узле (x_i, t_n) мы использовали минимально возможный пятиточечный шаблон (рис. 5). Используя формулу Тейлора, нетрудно показать, что схема (10.5) имеет локальный порядок аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ на решении $u \in C^4(\bar{Q})$.

Из рис. 5 видно, что схема (10.5) связывает значения сеточного решения на трех слоях. Это означает, что (10.5) является явной *трехслойной* разностной схемой.

Полагая $C = u\tau/h$, перепишем (10.5) в виде

$$v_i^{n+1} = -v_i^{n-1} + c^2(v_{i-1}^n + v_{i+1}^n) + 2(1 - c^2)v_i^n + \tau^2 f_i^n, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad n = 1, 2, \dots, M-1. \quad (10.5a)$$

Из (10.5a) видно, что для последовательного вычисления значений сеточного решения по схеме (10.5) необходимо знание v в граничных узлах, а также в узлах нулевого и первого слоев. Значения $v_i^0, i = 0, 1, \dots, N$ и $v_0^{n+1}, v_N^{n+1}, n = 0, 1, \dots, M-1$ определяются из соотношений

$$v_i^0 = \varphi^n(x_i) \equiv \varphi(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (10.6)$$

$$v_0^{n+1} = g_1(t_{n+1}), \quad v_N^{n+1} = g_2(t_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, M-1, \quad (10.7)$$

абсолютно точно аппроксимирующих первое начальное условие в (10.2) и краевые условия (10.3). Значение v_i^1 можно определить из соотношения

$$\frac{v_i^1 - v_i^0}{\tau} = \psi^h(x_i) \equiv \psi(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (10.8)$$

аппроксимирующего второе условие в (10.2) с порядком $O(\tau)$. Однако глобальный порядок аппроксимации полученной таким образом схемы (10.5)–(10.8) равен $O(h^2 + \tau)$. Чтобы получить схему порядка $O(h^2 + \tau^2)$ достаточно заменить (10.8) соотношением

$$\frac{v_i^1 - v_i^0}{\tau} = \psi^h(x_i) = \psi(x_i) + \frac{1}{2} [a^2 \varphi''(x_i) + f(x_i, 0)] \tau, \quad (10.8a)$$

аппроксимирующем второе условие в (10.2) с порядком $O(\tau^2)$. В последнем легко убедиться, используя стандартное разложение решения по формуле Тейлора.

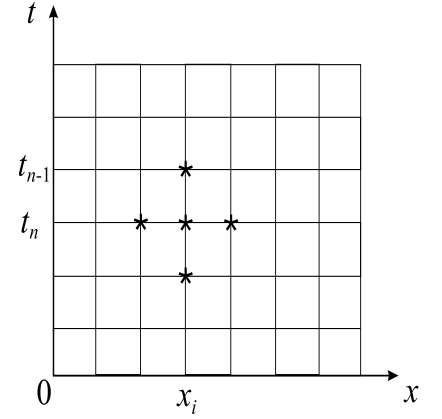


Рис. 5:

10.2. Исследование устойчивости. Исследуем устойчивость схемы (10.5)–(10.8), предполагается для простоты, что $f = 0$, $g_1 = g_2 = 0$, причем $\varphi^h \in \overset{\circ}{H}_{N-1}$, $\psi^h \in \overset{\circ}{H}_{N-1}$. Применим для этого метод гармоник, следуя которому решение задачи (10.5)–(10.8) ищем в виде (9.22) с неизвестными пока сеточными функциями $q_k(t)$. Чтобы их определить подставим (9.22) в (10.5). Рассуждая так же, как в §9, приходим к следующему уравнению для $q_k^n = q_k(t_n)$:

$$q_k^{n+1} - 2(1 - \mu_k)q_k^n + q_k^{n-1} = 0, \quad \mu_k = \frac{1}{2}\tau^2\lambda_k. \quad (10.9)$$

Решение уравнения (10.9) при фиксированном k ищем по аналогии с (9.30) в виде $q_k^n = q_k^0 \xi_k^n$, где ξ_k^n означает n -ю степень неизвестного пока числа ξ . В таком случае из (10.9) получаем для ξ квадратное уравнение

$$\xi^2 - 2(1 - \mu_k)\xi + 1 = 0, \quad (10.10)$$

корни которого имеют вид

$$\xi_k^{(1)} = 1 - \mu_k - \sqrt{\mu_k(\mu_k - 2)}, \quad \xi_k^{(2)} = 1 - \mu_k + \sqrt{\mu_k(\mu_k - 2)}. \quad (10.11)$$

При $0 < \mu_k < 2$ корни (10.11) комплексные и по модулю равны единице: $|\xi_k^{(1)}| = |\xi_k^{(2)}| = 1$. Поэтому найдется такое число θ_k , что

$$\cos\theta_k = \operatorname{Re}\xi_k^{(1)} = 1 - \mu_k, \quad \sin\theta_k = \operatorname{Im}\xi_k^{(1)} = \sqrt{\mu_k(2 - \mu_k)}. \quad (10.12)$$

С учетом этого имеем: $\xi_k^{(1)} = e^{i\theta_k}$, $\xi_k^{(2)} = e^{-i\theta_k}$, а общее решение разностного уравнения (10.9) в таком случае можно записать в виде $A_k e^{in\theta_k} + B_k e^{-in\theta_k}$ или в эквивалентном (вещественном) виде

$$q_k^n = a_k \cos n\theta_k + b_k \sin n\theta_k. \quad (10.13)$$

Здесь A_k, B_k, a_k, b_k – произвольные вещественные постоянные.

С учетом (10.13) формулу (9.22) перепишем в виде

$$v^n(x) = \sum_{k=1}^{N-1} (a_k \cos n\theta_k + b_k \sin n\theta_k) w_k(x). \quad (10.14)$$

По построению функция (10.14) удовлетворяет однородному уравнению (10.5) и однородным краевым условиям (10.7) при любых постоянных a_k и b_k . Осталось их подобрать так, чтобы функция (10.14) удовлетворяла начальным условиям (10.6), (10.8) [либо (10.8а)]. Для этого разложим начальные функции φ^h и ψ^h в ряд Фурье по w_k

$$\varphi^h(x) = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{\varphi}_k w_k(x), \quad \psi^h(x) = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{\psi}_k w_k(x), \quad (10.15)$$

где

$$\hat{\varphi}_k = \frac{2}{l}(\varphi^h, w_k); \quad \hat{\psi}_k = \frac{2}{l}(\psi^h, w_k). \quad (10.16)$$

Подставляя (10.14) и (10.15) в (10.6), (10.8) приходим к следующим уравнениям для a_k и b_k :

$$a_k = \hat{\varphi}_k, \quad a_k \frac{\cos\theta_k - 1}{\tau} + b_k \frac{\sin\theta_k}{\tau} = \hat{\psi}_k.$$

Отсюда находим

$$a_k = \hat{\varphi}_k, \quad b_k = \frac{1 - \cos\theta_k}{\sin\theta_k} \hat{\varphi}_k + \frac{\tau}{\sin\theta_k} \hat{\psi}_k. \quad (10.17)$$

Подставляя далее (10.17) в (10.14), приходим после некоторых преобразований к следующему выражению для решения v задачи (10.5)–(10.8)

$$v_n(x) = \sum_{k=1}^{N-1} \left[\frac{\cos(n-1/2)\theta_k}{\cos(\theta_k/2)} \hat{\varphi}_k + \frac{\tau \sin n\theta_k}{\sin\theta_k} \hat{\psi}_k \right] w_k(x). \quad (10.18)$$

Выведем из (10.18) оценку $\|v^n\|$ через нормы начальных функций φ^h и ψ^h . Предположим, что h и τ связаны соотношением

$$c^2 = \frac{a^2 \tau^2}{h^2} \leq \frac{1}{1+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0 \implies \mu_k \leq \frac{2}{1+\varepsilon}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (10.19)$$

В таком случае

$$\cos(\theta_k/2) = \sqrt{\frac{1 + \cos\theta_k}{2}} = \sqrt{1 - \frac{\mu_k}{2}} \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}; \quad (10.20)$$

$$\frac{\sin\theta_k}{\tau} = \frac{2}{\tau} \sin \frac{\theta_k}{2} \cos \frac{\theta_k}{2} \geq \frac{2}{\tau} \sin \frac{\theta_k}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\lambda_k \varepsilon}{1+\varepsilon}}, \quad (10.21)$$

поскольку

$$2 \sin \frac{\theta_k}{2} = \sqrt{2(1 - \cos\theta_k)} = \sqrt{2\mu_k} = \sqrt{\lambda_k \tau}.$$

Из (10.18), (10.20), (10.21) вытекает при выполнении (10.19), что

$$\begin{aligned} \|v^n\| &\leq \left\| \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\cos(n-1/2)\theta_k}{\cos(\theta_k/2)} \hat{\varphi}_k w_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\tau \sin n\theta_k}{\sin\theta_k} \hat{\psi}_k w_k \right\| \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{l(1+\varepsilon)}{\varepsilon}} (\|\varphi^h\| + \|\psi^h\|_{-1}), \end{aligned} \quad (10.22)$$

где

$$\|\psi^h\|_{-1} = \left[\sum_{k=1}^{N-1} \frac{(\hat{\psi}_k)^2}{\lambda_k} \right]^{1/2} \quad (10.23)$$

имеет смысл *негативной* нормы начальной функции ψ^h .

Оценка (10.22) по определению означает устойчивость трехслойной схемы (10.5)–(10.8) по начальным данным.

Указанная устойчивость является условной, поскольку неравенство (10.22) доказано при выполнении условия (10.19) на шаги h и τ т.е. фактически при $c < 1$. Если же $c > 1$, то при достаточно малых h , начиная с некоторого номера k $\mu_k > 2$. Для таких значений k , что означает неустойчивость соответствующей гармоники, а, следовательно, и всей схемы в целом. Наконец, при $c = 1$ схема (10.5)–(10.8) является устойчивой, в чем можно убедиться с помощью энергетического метода [12, с.315]. При этом само разностное уравнение (10.5) имеет при $c = 1$ бесконечный порядок аппроксимации. Аналогичным образом исследуется устойчивость схемы (10.5)–(10.8) по правой части (см. [12, с.313]).

Важно отметить, что условие устойчивости $c \leq 1$ схемы (10.5)–(10.8) совпадает с условием устойчивости Куранта для простейшей явной схемы (6.50), аппроксимирующей уравнение переноса (6.1). Это не случайно, поскольку задача решения волнового уравнения (10.1) эквивалентна решению двух независимых уравнений переноса

$$U_t + aU_x = F, \quad V_t - aV_x = F. \quad (10.24)$$

Действительно, уравнения (10.24) с помощью линейной замены $U = u + av$, $V = u - av$ сводятся к системе

$$u_t + a^2 v_x = F, \quad v_t + u_x = 0,$$

которая после дифференцирования первого уравнения по t , второго по x и последующего сложения приводит к уравнению (10.1), где $f = F_t$. Используя указанную эквивалентность, для уравнения (10.1) можно построить двухпараметрическое семейство трехслойных трехточечных схем порядка $O(h^2 + \tau^2)$, включающее схему повышенной точности $O(h^4 + \tau^4)$ и на основе развитого в §§6,7 аппарата исследовать условия их устойчивости. Не имея возможности останавливаться на этом, отметим что указанные вопросы исследованы в [12, гл.5] для однопараметрического семейства схем

$$v_{\bar{t}\bar{t}}(x_i, t_n) = a^2 [\sigma v_{\bar{x}\bar{x}}^{n-1} + (1 - 2\sigma)v_{\bar{x}\bar{x}}^n + \sigma v_{\bar{x}\bar{x}}^{n+1}] (x_i, t_n) + f(x_i, t_n)$$

включающего явную схему (10.5) в качестве частного случая.

§11. Уравнение Пуассона

В этом параграфе будут приведены некоторые наиболее употребительные разностные схемы, аппроксимирующие задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = f(x, y) \quad \text{в } \Omega, \quad (11.1)$$

$$u = g(x, y) \quad \text{на } \Gamma, \quad (11.2)$$

где Ω – некоторая ограниченная область плоскости x, y с границей Γ , и исследованы некоторые их свойства.

11.1. Употребительные разностные схемы. В отличие от одномерного случая построения разностной схемы для задачи (11.1), (11.2) существенно зависит от вида области Ω и связано с определенными трудностями, если ее граница Γ является криволинейной. Отвлекаясь пока от вида области Ω , рассмотрим уравнение (11.1) на всей плоскости x, y , где введем бесконечную равномерную прямоугольную сетку ω с шагами h_1 по x и h_2 по y . Построим разностную схему для уравнения (11.1) методом разностного дифференцирования.

Пусть $(x, y) \in \omega$ – произвольный узел. Аппроксимируя в узле (x, y) производные v_{xx} и v_{yy} их разностными отношениями

$$L_1 v \equiv v_{xx} \approx v_{\bar{x}x} \equiv \Lambda_1 v, \quad L_2 v \equiv v_{yy} \approx v_{\bar{y}y} \equiv \Lambda_2 v,$$

а правую часть f ее значением $f(x, y)$, приходим к схеме

$$v_{\bar{x}x}(x, y) + v_{\bar{y}y}(x, y) = f^h(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \omega, \quad (11.3)$$

имеющей в индексных обозначениях вид

$$\frac{v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j}}{h_1^2} + \frac{v_{i,j-1} - 2v_{i,j} + v_{i,j+1}}{h_2^2} = f_{ij} = f(x_i, y_j). \quad (11.3a)$$

Определим порядок аппроксимации схемы (11.3). Пусть u – точное решение уравнения (11.1). В силу формулы (1.20) имеем

$$\Lambda_i u = L_i u + \frac{1}{12} h_i^2 L_i^2 u + O(h^4), \quad u \in C^6 (= L_i u + O(h^2), u \in C^4). \quad (11.4)$$

Здесь $h = \max(h_1, h_2)$, $L_1^2 u = \partial^4 u / \partial x^4$, $L_2^2 u = \partial^4 u / \partial y^4$. Из (11.4) следует, что

$$\delta f^h(x, y) = u_{\bar{x}x}(x, y) + u_{\bar{y}y}(x, y) - f^h(x, y) = O(h^2), \quad u \in C^4. \quad (11.5)$$

Формула (11.5) означает, что схема (11.3) имеет локальный порядок аппроксимации $O(h^2)$ на решении $u \in C^4$.

Следует отметить, что схема (11.3) задана на простейшем (минимально возможном) пятиточечном шаблоне типа “крест”, состоящем из пяти точек: точки (x, y) и четырех точек, симметрично расположенных относительно (x, y) (рис. 6а).

Можно доказать, что на этом шаблоне нельзя построить разностную аппроксимацию, имеющую порядок более высокий, чем $O(h^2)$ [13, с.109]. Таким образом для построения схем более высокого порядка следует усложнять шаблон. Используя, например, шаблон типа “ящик” (рис. 6б) можно построить схему порядка $O(h^4)$. Для

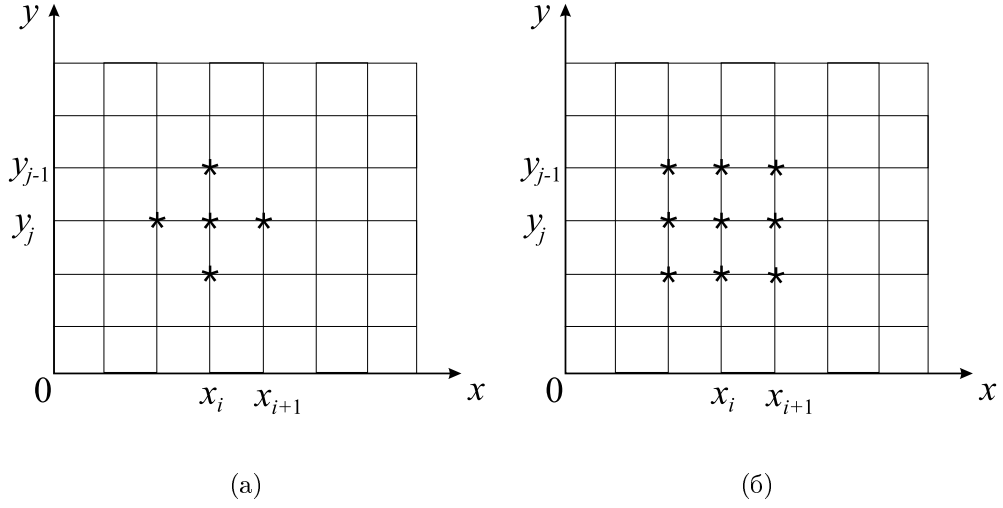


Рис. 6: Примеры двумерных сеток.

построения соответствующей схемы заметим, что в силу (1.20) имеем на гладком решении $u \in C^6$, что

$$\begin{aligned} \Lambda u &\equiv \Lambda_1 u + \Lambda_2 u = \Delta u + \frac{1}{12}(h_1^2 L_1^2 + h_2^2 L_2^2)u + O(h^4) = \\ &= \Delta u + \frac{1}{12}(h_1^2 L_1 + h_2^2 L_2)\Delta u - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12}L_1 L_2 u + O(h^4), \quad u \in C^6. \end{aligned} \quad (11.6)$$

В силу результатов §1, имеем, что

$$\begin{aligned} L_1 L_2 u &\equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = u_{\bar{x}\bar{x}\bar{y}\bar{y}} + O(h^2) = \\ &= \Lambda_1 \Lambda_2 u + O(h^2), \quad u \in C^6, \quad L_i f = \Lambda_i f + O(h^2), \quad f \in C^4. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Из (11.6) и (11.7) приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \Lambda u + \frac{1}{12}(h_1^2 + h_2^2)\Lambda_1 \Lambda_2 u &= f + \frac{1}{12}(h_1^2 L_1 f + h_2^2 L_2 f) + O(h^4) = \\ &= f + \frac{1}{12}(h_1^2 \Lambda_1 f + h_2^2 \Lambda_2 f) + O(h^4). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что разностное уравнение

$$\tilde{\Lambda} v(x, y) = \Lambda v(x, y) + \frac{1}{12}(h_1^2 + h_2^2)\Lambda_1 \Lambda_2 v(x, y) = f^h(x, y), \quad (x, y) \in \omega, \quad (11.8)$$

где

$$f^h(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{12} \left[h_1^2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + h_2^2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right], \quad (11.9)$$

либо

$$f^h(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{12} [h_1^2 \Lambda_1 f(x, y) + h_2^2 \Lambda_2 f(x, y)] \quad (11.10)$$

аппроксимирует уравнение (11.1) на решении $u \in C^6$ с порядком $O(h^4)$. Обе аппроксимации (11.9) и (11.10) правой части f эквивалентны по порядку, но вторую использовать удобнее, так как она не содержит производных функции f . Важно отметить, что в обоих случаях разностное уравнение определено на указанном выше шаблоне “ящик”.

Выбирая шаблон с еще большим числом узлов, можно построить разностные схемы порядка $O(h^6)$ и выше. Однако эти схемы сложны в их реализации, поэтому на их изучении мы не будем останавливаться. Отметим лишь, что схему порядка $O(h^6)$ можно построить и на шаблоне типа “ящик”, если взять $h_1 = h_2 = h$ [13, с.111]. Мы также не останавливаемся здесь на аппроксимации оператора Лапласа на треугольной, шестиугольной и неравномерной сетках. Об этом см. [13].

11.2. Аппроксимация краевой задачи. В этом пункте мы исследуем вопрос об аппроксимации задачи Дирихле (11.1), (11.2). Первый этап аппроксимации указанной задачи заключается во введении разностной сетки. При построении сетки в Ω следует учитывать специфику ее границы и вводить такую сетку, на которой наиболее удобно аппроксимировать задачу (11.1), (11.2). Так например, в случае, если область Ω является прямоугольником

$$\Omega = (0 < x < l_1, 0 < y < l_2), \quad (11.11)$$

величины шагов h_1 и h_2 прямоугольной равномерной сетки $\bar{\omega}$ следует согласовать с длинами сторон l_1 и l_2 прямоугольника Ω , полагая

$$h_1 = l_1/N_1, \quad h_2 = l_2/N_2, \quad (11.12)$$

где $N_1 > 1$ и $N_2 > 1$ – некоторые целые числа. В этом случае сетка $\bar{\omega}$ имеет вид

$$\bar{\omega} = \{(x_i, y_j), \quad i = 0, 1, \dots, N_1; \quad j = 0, 1, \dots, N_2\}. \quad (11.13)$$

Полученная сетка обладает той особенностью, что ее граница γ расположена на границе Γ области Ω . Это позволяет аппроксимировать граничные условия (11.2) абсолютно точно с помощью формулы

$$v(x, y) = g^h(x, y) = g(x, y) \quad \forall (x, y) \in \gamma. \quad (11.14)$$

Из результатов п.1 вытекает тогда, что схема (11.3), (11.4) (либо (11.8), (11.9), (11.14)) аппроксимирует задачу (11.1), (11.2) с порядком $O(h^2)$ (либо $O(h^4)$) на решении $u \in C^4(\bar{\Omega})$ (либо $u \in C^6$).

Пусть теперь граница Γ области Ω является произвольной кусочно-гладкой кривой. Рассмотрим на плоскости \mathbb{R}^2 сетку с узлами (x_i, y_j) , где $x_i = ih_1$, $y_j = jh_2$,

$i, j = 0, \pm 1, \dots$, введенную в п.1. Обозначим через ω_0 множество всех тех узлов (ih_1, jh_2) , которые лежат внутри области Ω , такие узлы назовем *внутренними* узлами сетки ω . Внутренний узел (x_i, y_j) назовем *регулярным*, если все его четыре соседних узла образуют вместе с (x_i, y_j) шаблон “крест”, принадлежащий $\bar{\Omega}$. Множество регулярных узлов обозначим через $\overset{\circ}{\omega}$. Если хотя бы один из этих четырех соседних с (x_i, y_j) узлов не принадлежит $\bar{\Omega}$, то такой узел (x_i, y_j) назовем *нерегулярным* внутренним узлом сетки ω_0 . Множество всех нерегулярных внутренних узлов обозначим через ω^* , так что $\omega_0 = \overset{\circ}{\omega} \cup \omega^*$. Точки пересечения прямых $x = ih_1, y = jh_2, i, j = 0, \pm 1, \pm 2$ с границей Γ области Ω назовем *граничными* узлами. Множество всех граничных узлов обозначим через γ . В результате мы построили в $\bar{\Omega}$ сетку $\bar{\omega} = \omega_0 \cup \gamma$, состоящую из множества внутренних узлов $\omega_0 = \overset{\circ}{\omega} \cup \omega^*$ и множества граничных узлов γ (рис. 7а).

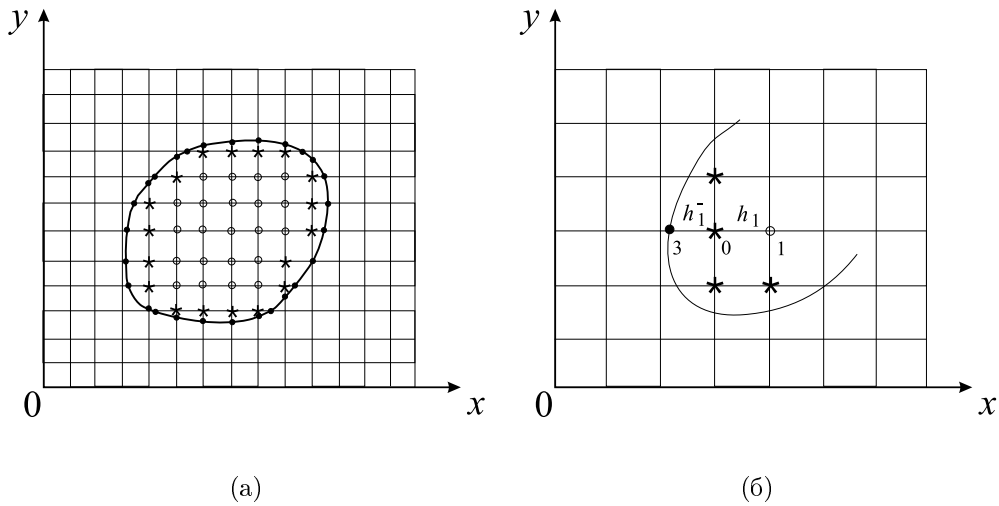


Рис. 7: Примеры двумерных сеток

Используя сетку $\bar{\omega}$, построим разностную схему, аппроксимирующую краевую задачу (11.1), (11.2). Для этого необходимо написать аппроксимацию уравнения (11.1) как в регулярных, так и в нерегулярных узлах сетки ω_0 и аппроксимировать граничное условие (11.2). На множестве $\overset{\circ}{\omega}$ уравнение (11.1) можно аппроксимировать уравнением (11.3), используя шаблон “крест” и имея порядок аппроксимации $O(h^2)$ на решении $u \in C^4(\bar{\Omega})$. Граничное условие (11.2) в узлах γ аппроксимируется абсолютно точно соотношением (11.14). Осталось самое сложное: написать аппроксимацию уравнения (11.1) в нерегулярных узлах сетки ω_0 . Здесь возможны различные варианты.

а) Простой снос или интерполяция нулевого порядка. В этом случае узлы

ω^* рассматриваются как граничные и условие на ω^* задается соотношением

$$v(x, y) = g(\bar{x}, \bar{y}), \quad (x, y) \in \omega^*, \quad (11.15)$$

где $(\bar{x}, \bar{y}) \in \gamma$ – ближайший к (x, y) узел границы γ . Соотношение (11.15) можно трактовать как интерполяцию нулевого порядка. Нетрудно проверить, что погрешность формулы (11.15) имеет порядок $O(h)$ [13, с.135].

б) Интерполяция первого порядка. Множество узлов ω^* снова рассматривается как граничное, но сеточное краевое условие задается интерполяцией первого порядка вдоль одной из осей x или y . Например, для случая, изображенного на рис.76, значение сеточного решения в узле 0 определяется путем линейной интерполяции вдоль оси x по узлам 3 и 1, т.е.

$$v_0 = \frac{h_1^- v_1 + h_1 v_3}{h_1^- + h_1}. \quad (11.16)$$

Можно показать, что погрешность формулы (11.16) имеет порядок $O(h^2)$.

в) Аппроксимация уравнения (11.1) на неравномерной сетке. В этом случае узлы множества ω^* рассматриваются как внутренние, а уравнение (11.1) аппроксимируется на неравномерной сетке по пятиточечному шаблону “крест”. Более подробно об этом способе аппроксимации в нерегулярных узлах сетки ω (а так же о некоторых других способах) можно прочитать в [13, с.137].

11.3. Исследование устойчивости решения задачи Дирихле методом априорных оценок. Ограничимся здесь исследованием устойчивости простейшей разностной схемы (11.3), (11.14), аппроксимирующей задачу (11.1), (11.2) на сетке (11.13) в случае, когда Ω имеет вид прямоугольника (11.11). Краевое условие (11.2) для простоты будем считать однородным, так что (11.14) принимает вид

$$v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \gamma. \quad (11.17)$$

Следуя схеме §8, рассмотрим введенное в §3 пространство $\overset{\circ}{H}_N$ двумерных сеточных функций на $\bar{\omega}$, равных нулю на границе γ , со скалярным произведением и нормой (3.24). Обозначим через $v(\cdot, y_j)$ (либо $v(x_i, \cdot)$) сужение функции $v \in \overset{\circ}{H}_N$ на множество узлов (x_i, y_j) при $0 \leq i \leq N_1$ и фиксированном j (либо (x_i, y_j) при $0 \leq j \leq N_2$ и фиксированном i). Ясно, что

$$v \in \overset{\circ}{H}_N \iff v(\cdot, y_j) \in \overset{\circ}{H}_{N_1-1}, \quad v(x_i, \cdot) \in \overset{\circ}{H}_{N_2-1}, \quad i = 0, 1, \dots, N_1; \quad j = 0, 1, \dots, N_2.$$

Здесь $\overset{\circ}{H}_{N_1-1}$ и $\overset{\circ}{H}_{N_2-1}$ – соответствующие пространства одномерных сеточных функций, зависящих от x либо y .

Умножим уравнение (11.3а) на v_{ij} и просуммируем по i от 1 до $N_1 - 1$ и по j от 1 до $N_2 - 1$. Учитывая обозначения (3.24), получим

$$((v_{\bar{x}x}, v)) + ((v_{\bar{y}y}, v)) = ((f, v)). \quad (11.18)$$

Но в силу (11.17) и формулы (3.16) имеем

$$\left. \begin{aligned} ((v_{\bar{x}x}, v)) &= \sum_{j=1}^{N_2-1} (v_{\bar{x}x}, (\cdot, y_j), v(\cdot, y_j))h_2 = - \sum_{j=1}^{N_2-1} \|v_{\bar{x}}, (\cdot, y_j)\|/h_2, \\ ((v_{\bar{y}y}, v)) &= \sum_{i=1}^{N_1-1} (v_{\bar{y}y}, (x_i, \cdot), v(x_i, \cdot))h_1 = - \sum_{i=1}^{N_1-1} \|v_{\bar{y}}, (x_i, \cdot)\|/h_1 \end{aligned} \right\} \quad (11.19)$$

Используя (11.19) и применяя к правой части (11.18) неравенство Коши и далее неравенство Фридрикса (3.26), получаем

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|^2 &\equiv \sum_{j=1}^{N_2-1} \|v_{\bar{x}}, (\cdot, y_j)\|^2 h_2 + \sum_{i=1}^{N_1-1} \|v_{\bar{y}}, (x_i, \cdot)\|^2 h_1 \leq \\ &\leq \|f\| \|v\| \leq C \|f\| \|\nabla v\|, \quad C^2 = \frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2 + l_2^2)}. \end{aligned}$$

Отсюда, сокращая на $\|\nabla v\|$, приходим к оценке

$$\|\nabla v\| \leq C \|f\|, \quad (11.20)$$

означающей устойчивость решения задачи (11.3), (11.14) в норме (3.25). Из оценки (11.20) и (3.25) в свою очередь легко вытекает оценка

$$\|v\| \leq C^2 \|f\|, \quad (11.21)$$

означающая устойчивость решения в евклидовой норме (3.24). Важно отметить, что любая из оценок (11.20), (11.21) влечет за собой не только устойчивость, но и корректность схемы (11.3), (11.14). Этот факт доказывается точно так же, как и соответствующие утверждения в §8. В результате приходим к выводу, что разностная схема (11.3), (11.14) сходится при $h \rightarrow 0$, причем сходимость имеет порядок $O(h^2)$, если решение u принадлежит классу $C^4(\bar{\Omega})$.

Изложенный здесь метод исследования устойчивости можно применять и для более сложных разностных схем, аппроксимирующих задачу (11.1), (11.2) как в прямоугольнике Ω , так и в области с криволинейной границей.

§12. Некоторые методы решения сеточных уравнений

12.1. Метод прогонки. Как было показано выше, численное решение задач математической физики во многих случаях приводит к необходимости решения системы

линейных алгебраических уравнений вида

$$a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -d_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (12.1)$$

$$y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1, \quad y_N = \chi_2 y_{N-1} + \mu_2. \quad (12.2)$$

Здесь $a_i, b_i, c_i, d_i, i = 1, 2, \dots, N-1$ и $\chi_k, \mu_k, k = 1, 2$ – заданные числа, а $y_i, i = 0, 1, \dots, N$ – неизвестные, которые необходимо определить. Для нахождения решения системы (12.1), (12.2) предположим, что решение y_i удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (12.3)$$

с неопределенными пока коэффициентами α_{i+1} и β_{i+1} . Для определения α_{i+1} и β_{i+1} подставим выражение $y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i$ в (12.1). Будем иметь

$$(\alpha_i a_i - c_i) y_i + \beta_i a_i + b_i y_{i+1} = -d_i,$$

откуда, разделив на $\alpha_i a_i - c_i$, получаем

$$y_i = \frac{b_i}{c_i - \alpha_i a_i} y_{i+1} + \frac{\beta_i a_i + d_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (12.4)$$

Сравнивая (12.3) и (12.4), приходим к следующим рекуррентным соотношениям для α_{i+1} и β_{i+1} :

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{\beta_i a_i + d_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (12.5)$$

Если коэффициенты α_i и β_i известны и известно значение y_N , то двигаясь справа налево (от $i = N$ к $i = 0$) с помощью формулы (12.3) можно последовательно определить все значения y_i . Для нахождения α_i и β_i достаточно, согласно (12.5), определить α_1 и β_1 . Чтобы найти эти значения, воспользуемся первым краевым условием в (12.2) и уравнением (12.3) при $i = 0$, согласно которым имеем

$$y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1, \quad y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1 \implies \alpha_1 = \chi_1, \quad \beta_1 = \mu_1.$$

После того, как значения α_i и β_i найдены, необходимо определить значение y_N . Оно определяется из второго граничного условия в (12.2) и уравнения (12.3) при $i = N-1$, согласно которым

$$y_N = \chi_2 y_{N-1} + \mu_2, \quad y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N \implies y_N = \frac{\mu_2 + \chi_2 \beta_N}{1 - \alpha_N \chi_2}.$$

Изложенный метод решения системы (12.1), (12.2) называется методом (правой) прогонки. Соберем все формулы прогонки и запишем их в порядке использования

$$\alpha_1 = \chi_1, \quad \beta_1 = \mu_1, \quad \alpha_{i+1}^{(\rightarrow)} = \frac{b_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \quad \beta_{i+1}^{(\rightarrow)} = \frac{\beta_i a_i + d_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

$$y_N = \frac{\mu_2 + \chi_2 \beta_N}{1 - \chi_2 \alpha_N}, \quad \overleftarrow{y}_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, N-2, \dots, 0. \quad (12.6)$$

Стрелки наверху в (12.6) указывают направление счета: (\rightarrow) от i к $i+1$ (прямой ход прогонки) (\leftarrow) от $i+1$ к i (обратный ход). Элементарный подсчет числа операций в (12.6) показывает, что метод прогонки требует для своей реализации проведения всего лишь $8N$ арифметических операций.

Следует отметить, что формулы (12.6) были выведены нами формально, поскольку, например, мы делили на выражения $c_i - \alpha_i a_i$ и $1 - \chi_2 \alpha_N$, не проверяя, будут ли они отличны от нуля. Можно показать, что они не обращаются в нуль и что метод прогонки устойчив по отношению к ошибкам округления, если выполняются условия (1.31).

12.2. Метод разделения переменных. Рассмотрим систему

$$(\Delta v)_{ij} = (\Lambda_1 v)_{ij} + (\Lambda_2 v)_{ij} = f_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1; \quad v \in \mathring{H}_N, \quad (12.7)$$

аппроксимирующую однородную задачу Дирихле (11.1), (11.2) для уравнения Пуассона в прямоугольнике (11.11). Разложим правую часть f_{ij} в (12.7) в однократный ряд Фурье по собственным функциям w_k задачи Штурма-Лиувилля (3.28). Будем иметь

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{N_1-1} \hat{f}_{kj} w_k(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1. \quad (12.8)$$

Здесь $\hat{f}_{kj} = \hat{f}_k(y_j)$ – коэффициенты Фурье, зависящие от j , определяемые в силу (3.30) формулами

$$\hat{f}_{kj} = \frac{2}{l_1} \sum_{i=1}^{N_1-1} f_{ij} w_k(x_i). \quad (12.9)$$

Решение задачи (12.7) будем искать в виде аналогичной суммы

$$v_{ij} = \sum_{k=1}^{N_1-1} q_{kj} w_k(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1 \quad (12.10)$$

с неизвестными коэффициентами $q_{kj} = q_k(y_j)$. Для определения q_{kj} подставим (12.8) и (12.10) в (12.7). Учитывая, что $(\Lambda_1 w_k)_i = -\lambda_k w_k(x_i)$, получим

$$(\Delta v)_{ij} = \sum_{k=1}^{N_1-1} [-\lambda_k q_{kj} + (\Lambda_2 q_k)_j] w_k(x_i) = \sum_{k=1}^{N_1-1} \hat{f}_{kj} w_k(x_i). \quad (12.11)$$

Из (12.11) приходим к соотношениям

$$(\Lambda_2 q_k)_j - \lambda_k q_{kj} = -\hat{f}_{kj}, \quad k = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1. \quad (12.12)$$

При фиксированном k равенства (12.12) представляют собой систему трехточечных разностных уравнений относительно q_k . Поэтому для нахождения q_{kj} можно воспользоваться методом прогонки, что потребует $O(N_1 N_2)$ арифметических операций. Определив q_{kj} , далее по формулам (12.10) находим значения v_{ij} решения v задачи (12.7). Последнее так же, как и определение коэффициентов Фурье правой части f_{ij} по формулам (12.9), сводится к вычислению сумм вида

$$\sum_{k=1}^{N_1-1} a_{kj} \sin \frac{k\pi i}{N_1}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1 \quad (12.13)$$

и требует $O(N_1^2 N_2)$ арифметических операций. Однако если воспользоваться алгоритмом быстрого преобразования Фурье [14, с.168], требующим для вычисления всех сумм (12.13) порядка $O(N_2 \log_2 N_2)$ арифметических операций (при $N_1 = 2^n$) вместо $O(N_1^2)$ при обычном способе суммирования, то для решения системы разностных уравнений (12.7) потребуется $O(N_1 N_2 \log_2 N_1)$ арифметических операций. Таким образом, при $N_1 = 2^n$ приведенный алгоритм является экономичным (с точностью до множителя $\log_2 N_2$) методом решения разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной области Ω .

Опишем еще один экономичный метод решения системы (12.7). С этой целью разложим правую часть f_{ij} системы (12.7) в двухмерный ряд Фурье по собственным функциям w_{kl} двухмерной задачи Штурма-Лиувилля (3.32). Будем иметь

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{N_1-1} \sum_{l=1}^{N_2-1} \hat{f}_{kl} w_{kl}(x_i, y_j), \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1, \quad (12.14)$$

где \hat{f}_{kl} – коэффициенты Фурье, определяемые формулой

$$\hat{f}_{kl} = \frac{4}{l_1 l_2} \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} f_{ij} w_{kl}(x_i, y_j), \quad k = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad l = 1, 2, \dots, N_2 - 1. \quad (12.15)$$

Решение задачи (12.7) будем искать в виде аналогичной суммы

$$v_{ij} = \sum_{k=1}^{N_1-1} \sum_{l=1}^{N_2-1} q_{kl} w_{kl}(x_i, y_j), \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1 \quad (12.16)$$

с неизвестными коэффициентами q_{kl} . Подставляя (12.14) и (12.16) в (12.7), приходим с учетом (3.32) к соотношениям

$$q_{kl} = w_{kl} / [\lambda_k^{(1)} + \lambda_l^{(2)}]. \quad (12.17)$$

Подставив (12.17) в (12.16), получим следующее представление решения задачи (12.7)

$$v_{ij} = \sum_{k=1}^{N_1-1} \sum_{l=1}^{N_2-1} \frac{\hat{f}_{kl}}{\lambda_k^{(1)} + \lambda_l^{(2)}} w_{kl}(x_i, y_j). \quad (12.18)$$

При обычном правиле суммирования приведенный алгоритм требует для вычисления решения $O(N_1^2 N_2^2)$ арифметических операций. Однако если применить алгоритм быстрого преобразования Фурье при $N_1 = 2^n$, $N_2 = 2^m$, то для вычисления всех сумм (12.18) потребуется $O(N_1 N_2) \times \log_2(N_1 N_2)$ арифметических операций [14, с.192].

Кроме изложенных алгоритмов, основанных на методе Фурье, существует еще ряд экономичных алгоритмов решения сеточных уравнений вида (12.7): метод циклической редукции (декомпозиции), марш-метод, а также комбинированные методы. Указанные методы можно считать оптимальными или почти оптимальными с вычислительной точки зрения. Наряду с прямыми алгоритмами в последние годы интенсивно развиваются итерационные методы решения сеточных уравнений, применяемые как для прямоугольных, так и криволинейных областей. Среди итерационных методов необходимо отметить метод на последовательности сеток, предложенный в начале 60-х годов Федоренко Р.П., который по своим вычислительным характеристикам почти не уступает лучшим прямым методам, но имеет более широкую область применимости. Однако изложение итерационных методов выходит за рамки данного пособия.

Л и т е р а т у р а

1. Алексеев Г.В. *К вопросу о построении разностных схем повышенной точности для законов сохранения* // Дифференциальные уравнения и функциональный анализ. Владивосток, 1980. С.78–91.
2. Алексеев Г.В., Шайдуров В.В. *О некоторых разностных схемах для уравнения переноса субстанции* // Математические модели и вычислительные методы механики сплошной среды. Красноярск, 1979. С.144–151.
3. Алексеев Г.В. *Математические основы синтеза излучающих систем*. Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 1984. 112с.
4. Бахвалов Н.С. *Численные методы*. М.:Наука, 1975. 632с.
5. Годунов С.К., Рябенский В.С. *Разностные схемы*. М.:Наука, 1977. 440с.
6. Годунов С.К. *Уравнения математической физики*. М.:Наука, 1970. 391с.
7. Курант Р., Фридрикс К., Леви Г. *О разностных уравнениях математической физики* // Успехи матем. наук. 1941. Т.8. С.125–160.
8. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики*. М.:Наука, 1980. 535с.
9. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. *Повышение точности решений разностных схем*. М.:Наука, 1979. 320с.
10. Рихтмайер Р., Моргон К. *Разностные методы решения краевых задач*. М.:Мир, 1972. 418с.
11. Самарский А.А. *Введение в численные методы*. М.:Наука, 1982. 272с.
12. Самарский А.А. *Теория разностных схем*. М.:Наука, 1983. 616с.
13. Самарский А.А., Андреев В.В. *Разностные методы для эллиптических уравнений*. М.:Наука, 1976. 352с.
14. Самарский А.А., Николаев Е.С. *Методы решения сеточных уравнений*. М.:Наука, 1978. 591с.
15. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. М.:Наука, 1977. 735с.
16. Шайдуров В.В. *Повышение точности приближенных задач*. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1987. 96с.