МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.Ю.Чеботарев

ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ СПЛОШНЫХ СРЕД

учебно – методическое пособие

ДВГУ Владивосток 2003

УДК 532.5

Пособие содержит основные понятия, изучаемые в механике сплошных сред. На основе предложенной аксиоматики строится ряд классических моделей механики, рассматриваемых с точки зрения математической физики. Приведены контрольные задания, снабженные комментариями. Пособие можно использовать при изучении специальных и общих курсов таких как «Механика сплошных сред», «Краевые задачи гидродинамик», «Уравнения математической физики», «Физика».

Дальневосточный государственный университет, 2003

1 Математический аппарат механики сплошных сред

1.1 Тензоры

Геометрической основой для построения математических моделей физических процессов являются аффинные евклидовы пространства $\mathbb{R}^n$. Отображения и их характеристики, определенные на $\mathbb{R}^n$, получают при этом определенное физическое содержание.

Определение 1.1.1 Тензором ранга $r > 0$ называется r-линейная форма Φ на пространстве $\mathbb{R}^n$, т.е. отображение вида:

$$\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1,$$

линейное по каждому аргументу.

Числа $\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_r)$, где a_k – один из векторов базиса пространства $\mathbb{R}^n$, называются компонентами тензора Φ

Следует отметить, что тензор как алгебраический объект полностью определяется заданием набора из n^r своих компонент в каком-либо базисе, а множество тензоров ранга r является линейным векторным пространством размерности n^r. Для приложений важную роль играют следующие частные случаи, позволяющие дать понятию тензора наглядную интерпретацию.

1 $r = 1$. Тензор первого ранга — это линейный функционал на пространстве $\mathbb{R}^n$. В силу теоремы Рисса соотношение $\Phi = a \cdot p,\ p \in \mathbb{R}^n$ устанавливает изоморфизм между $\mathbb{R}^n$ и пространством линейных функционалов. В этом смысле удобно отождествлять вектора из $\mathbb{R}^n$ и тензоры ранга 1.

2 $r = 2$. Тензор второго ранга — это билинейная форма. Соотношение

$$\Phi(a, b) = a \cdot L \langle b \rangle \tag{1.1.1}$$

устанавливает изоморфизм между пространством $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ линейных операторов и пространством билинейных форм. Поэтому в дальнейшем, говоря о тензорах ранга 2, будем иметь в виду линейные отображения $\mathbb{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, связанные с соответствующей билинейной формой формулой (1.1.1).

Тензор ранга 2 как линейный оператор определяется в данном базисе $\{e_i\}_1^n$ матрицей своих компонент $T_{ij} = e_i T \langle e_j \rangle$. Определитель данной матрицы называется **детерминантом** тензора. В другом базисе этот же тензор T будет представлен другой матрицей, но детерминант его не изменится. Коэффициенты характеристического многочлена, который при $n = 3$ имеет вид

$$\det(T - \lambda T) = -\lambda^3 + J_1 \lambda^2 + J_2 \lambda + J_3, \tag{1.1.2}$$

не изменяются при переходе от одного базиса к другому и называются **инвариантами** тензора T. При этом $J_1 = \operatorname{tr} T = \sum T_{ii}$ — след тензора T, $T_3 = \det T$. Для второго инварианта справедлива формула

$$J_2 = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} T^2 - (\operatorname{tr} T)^2) \tag{1.1.3}$$

Отметим, что пространство тензоров ранга 2 можно сделать нормированным, если положить $\|T\| = (\max \lambda(T^* T))^{1/2}$, где $\lambda(A)$ — собственное значение тензора A.

С помощью операции tr вводится свертка или скалярное произведение тензоров ранга 2 как инвариантная операция $A : B = \operatorname{tr}(A^* B) = \operatorname{tr}(B^* A)$, где A^* — оператор, сопряженный к A, то есть $A^* \langle a \rangle b = a A \langle b \rangle$. В декартовом базисе $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ справедливо равенство $A : B = A_{ij} B_{ij}$. Здесь и далее, если не оговорено особо, по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до n.

Примеры:

/1/ Фундаментальный или единичный тензор определяется как тождественный оператор, имеющий билинейную форму $g(a, b) = a \cdot b$.

/2/ тензор $T' = T - \frac{1}{n}(\operatorname{tr} T)I$ называется **девиатором** тензора T. Отметим, что след девиатора равен нулю.

/3/ Тензор третьего ранга $\varepsilon(a,b,c) = a \cdot (b \times c)$ называется **дискриминантным**. Данный тензор определяет, например, ориентацию базиса в пространстве $\mathbb{R}^3$. Базис называется правым, если $\varepsilon_{123} = \varepsilon(e_1, e_2, e_3) > 0$.

1.2 Тензорные и векторные поля

Скалярным (соответственно векторным или тензорным) полем называется функция, определенная на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n,\ n \geq 1$ и принимающая значения в пространстве $\mathbb{R}$ (соответственно в $\mathbb{R}^m, m \geq 2$ или в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$).

В декартовой системе координат с базисом $\{\mathbf{e}_i\},\ i = 1, \ldots, n$ справедливы следующие определения дифференциальных операторов.

Градиент скалярного поля φ.

$$\operatorname{grad} \varphi = \vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right). \tag{1.2.1}$$

Дивергенция векторного поля $\mathbf{W}$.

$$\operatorname{div} \mathbf{W} = \vec{\nabla} \cdot \mathbf{W} = \frac{\partial W_i}{\partial x_i}. \tag{1.2.2}$$

Вихрь (ротор) векторного поля $\mathbf{W} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

$$\operatorname{rot} \mathbf{W} = \vec{\nabla} \cdot \mathbf{W} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial W_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_i, \tag{1.2.3}$$

где ε_{ijk} — компоненты дискриминантного тензора.

Следует обратить внимание на то, что величины $\operatorname{rot} \mathbf{W},\ \nabla \varphi$ и $\operatorname{div} \mathbf{W}$ не зависят от выбора базиса и что существует инвариантное определение этих операций.

Определение 1.2.1 Векторное поле $\mathbf{W}$ называется дифференцируемым в точке x, если существует тензор $T_x = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x}$ такой, что

$$\mathbf{W}(x+h) - \mathbf{W}(x) = T_x \langle h \rangle + o(|h|),\ \text{при } |h| \to 0$$

Тензор T_x называется производным тензором для векторного поля $\mathbf{W}$. В декартовом базисе матрицей тензора T_x служит матрица Якоби $\left(\left(\frac{\partial W_i}{\partial x_j}\right)\right)$ вектор — функции $\mathbf{W}$. Отметим также, что след тензора T_x совпадает с дивергенцией $\mathbf{W}$.

Для тензорных полей дивергенция определяется как векторное поле, такое, что

$$\mathbf{div}\, T \cdot \mathbf{a} = \operatorname{div}\left(T^* \langle \mathbf{a} \rangle\right) \ \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n.$$

В декартовом базисе $(\mathbf{div}\, T)_i = \dfrac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$.

Оператор Лапласа для скалярных и векторных функций определяется следующим образом

$$\Delta\varphi = \operatorname{div} \nabla\varphi, \ \Delta\mathbf{W} = \operatorname{div}\left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x}\right). \tag{1.2.4}$$

Заметим при этом, что $\operatorname{div}\left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x}\right)^* = \vec{\nabla}(\operatorname{div}\mathbf{W})$, а в декартовом базисе $\Delta\varphi = \sum\limits_1^n \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}, \ (\Delta\mathbf{W})_i = \Delta W_i$.

Интегральные теоремы

a) Формула интегрирования по частям в $\mathbb{R}^m$

$$\int\limits_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int\limits_\Omega \varphi \frac{\partial f}{\partial x_i} dx + \int\limits_{\partial\Omega} f\varphi n_i dS, \tag{1.2.5}$$

где $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ — единичный вектор внешней нормали к границе области Ω.

b) Формула Гаусса-Остроградского для векторного поля

$$\int\limits_\Omega \operatorname{div}\mathbf{W} dx = \int\limits_{\partial\Omega} (\mathbf{W}\cdot\mathbf{n}) dS, \tag{1.2.6}$$

и для тензорного поля

$$\int\limits_\Omega \mathbf{div}\, T dx = \int\limits_{\partial\Omega} T\langle \mathbf{n} \rangle\, dS. \tag{1.2.7}$$

c) Формула Стокса

$$\int\limits_S (\operatorname{rot}\mathbf{W}\cdot\mathbf{n})dS = \int\limits_{\mathcal{C}} \mathbf{W}d\mathbf{l} \tag{1.2.8}$$

где S — двумерная поверхность, ограниченная контуром $\mathcal{C}$.

1.3 Контрольное задание 1

1) Тензор $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ в декартовом базисе задан соотношением $T\langle\mathbf{a}\rangle = (3a_1 + a_2;\ a_1 + a_2)$.

   a) Найти компоненты тензоров T и T^*.

   b) Доказать положительную определенность тензора T:

   $$\mathbf{a}\cdot T\langle\mathbf{a}\rangle \geq \gamma\left(a_1^2 + a_2^2\right),\ \gamma = 2 - \sqrt{2}.$$

   c) Найти число $\lambda = \sup\{T\langle\mathbf{a}\rangle\cdot\mathbf{a},\ |\mathbf{a}| = 1\}$ и показать, что оно является собственным значением тензора. $|\mathbf{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$.

   d) Найти тензор B такой, что $B^2 = T$.

2) Тензорное поле задано на области Ω с объемом, равным 2:

   $$T(x)\langle\mathbf{a}\rangle = (\varphi(x)\,a_1 + \sin x_2 a_2\ ; x_2 a_2 + x_3 a_3\ ; g(x)\,a_3)\,,$$
   $$\varphi(x) = (3x_2 - x_1)\cos x_2,\ g(x) = \frac{3x_3}{2}.$$

   a) Найти $\mathbf{div}T(x)$.

   b) Определить длину вектора $\mathbf{p} = \int\limits_{\partial\Omega} T(x)\langle\mathbf{n}\rangle\,dS$.

3) В области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ определено гладкое векторное поле, такое, что

   $$\int\limits_\Omega (\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + \psi\cdot\Delta\varphi)dx = 0$$

   для любой функции φ равной нулю в окрестности границы Ω. Доказать, что поле является соленоидальным, если $\psi = x_1^2 - x_2^2$.

Комментарии к задачам.

1) (a) Достаточно использовать определение компонент тензора и формулу (1.1.1). (b-c) Можно вспомнить свойства квадратного трехчлена. (d) Следует учесть, что $T = T^*$ и значит $B = B^*$.

2) Можно применить формулу (1.2.7) для тензорных полей.

3) Задачу нетрудно решить, применяя соотношение (1.2.5), а также учитывая тот факт, что если $\int\limits_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = 0$ для любой φ равной нулю в окрестности границы области Ω, то $f \equiv 0$.

2 Аксиоматика. Два способа описания сплошной среды

2.1 Основные аксиомы и их физический смысл

1. **Аксиома пространства-времени.** Сплошная среда (СС) является подмножеством пространства $\mathbb{R}^3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Время абсолютно, то есть не зависит от событий.

2. **Аксиома материального континуума.** СС является материальным континуумом.

3. **Аксиома движения.** Для любого момента времени $t \in (0, T)$ перемещение СС из положения Ω_0 в положение Ω_t, описываемое отображением $\xi \to \gamma(\xi, t)$, где $\xi \in \Omega_0$, является гомеоморфизмом области Ω_0 на Ω_t. Для любого $\xi \in \Omega_0$ отображение $t \to \gamma(\xi, t)$ непрерывно дифференцируемо на интервале $(0, T)$.

4. **Аксиома сил и энергий.** Силовые и энергетические воздействия на произвольный объем $\omega \subset \Omega_t$ сплошной среды определяются :

a) внешними массовыми силами, имеющими плотность $\rho\mathbf{f}$, где ρ — плотность СС,

$$\mathbf{F} = \int\limits_{\omega} \rho\mathbf{f}dx \ ; \tag{2.1.1}$$

b) внутренними поверхностными силами, действующими на поверхность $\partial\omega$ и имеющими поверхностную плотность $\mathbf{p}_n$ (напряжение поверхностных сил), зависящую от направления $\mathbf{n}$ внешней нормали к $\partial\omega$.

$$\mathbf{F}_s = \int\limits_{\partial\omega} \mathbf{p}_n dS \ ; \tag{2.1.2}$$

c) потоком тепла в область ω через границу $\partial\omega$, имеющим поверхностную плотность q_n

$$Q = \int\limits_{\partial\omega} q_n dS. \tag{2.1.3}$$

5. **Аксиома баланса.** Для произвольного движущегося объема ω_t, то есть для объема, состоящего в любой момент времени из одних и тех же частиц СС, справедливы следующие законы сохранения в интегральной форме:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int\limits_{\omega_t} \rho dx\right) = 0 \qquad \text{— сохранение массы } M; \tag{2.1.4}$$

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int\limits_{\omega_t} \rho\mathbf{v} dx\right) = \mathbf{F} + \mathbf{F}_s \qquad \text{— сохранение импульса } \mathbf{K}; \tag{2.1.5}$$

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_t} \rho(\mathbf{x}\times\mathbf{v})dx = \int\limits_{\omega_t} \rho(\mathbf{x}\times\mathbf{f})dx + \int\limits_{\partial\omega_t} (\mathbf{x}\times\mathbf{p}_n)dS \tag{2.1.6}$$

— сохранение момента импульса $\mathbf{H}$;

$$\frac{d\widetilde{E}}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_t} \rho(U + \frac{1}{2}\mathbf{v}^{\,2})dx = Q + \int\limits_{\omega_t} \rho\mathbf{v}\mathbf{f}dx + \int\limits_{\partial\omega_t} \mathbf{v}\mathbf{p}_n dS \tag{2.1.7}$$

— сохранение энергии $\widetilde{E}$.

Поясним смысл сформулированных аксиом. Первая аксиома ограничивает моделирование рамками ньютоновской механики. Аксиома 2 означает, что на множестве Ω определены аддитивные неотрицательные функции множеств:

$$\forall\, \omega \subset \Omega \qquad \begin{array}{l} \omega \to M(\omega) \text{ — масса } \omega \\ \omega \to E(\omega) \text{ — внутренняя энергия } \omega, \end{array}$$

для которых существуют ограниченные производные по области

$$\rho(x) = \frac{dM}{d\omega} = \lim_{x\in\omega, |\omega|\to 0} \frac{M(\omega)}{|\omega|} \text{ — плотность СС,}$$

$U(x) = \rho^{-1} dE/d\omega$ — удельная внутренняя энергия СС. Здесь $|\omega|$ — объем ω.

Из данного определения вытекает, что

$$M(\omega) = \int\limits_{\omega} \rho(x)U(x)dx, \qquad E(\omega) = \int\limits_{\omega} \rho(x)U(x)dx \tag{2.1.8}$$

Замечание 2.1.1 Функция множеств $F(\omega)$ называется аддитивной, если $F(\omega_1 \cup \omega_2) = F(\omega_1) + F(\omega_2)$ для любых ω_1, ω_2 таких, что $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$.

Аксиома движения позволяет, во-первых, индивидуализировать частицу $x = \gamma(\xi, t)$ для любой точки $\xi \in \Omega_0$. При этом множество

$$\Gamma_\xi = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x = \gamma(\xi, t),\ t \in (0, T)\right\}$$

есть **траектория** частицы, а множество $\omega_t = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x = \gamma(\xi, t),\ \xi \in \omega_0\right\}$ называется **движущимся объемом**. Во-вторых, из аксиомы 3 следует существование производной $\mathbf{v} = \dfrac{\partial\gamma}{\partial t}$, т.е. определена **скорость частицы**.

Замечание 2.1.2 Из определения скорости вытекает, что траектории являются решениеми системы дифференциальных уравнений $dx/dt = \mathbf{v}(x, t)$, правая часть в которой зависит от переменной величины t, и поэтому нельзя их путать с **линиями тока**, т.е. с линиями, определенными для фиксированного момента времени t, касательная к которым в каждой точке параллельна вектору скорости.

Соотношения (2.1.1)-(2.1.3) описывают взаимодействие СС с внешними полями и другими частицами среды. В пятой аксиоме на основе фундаментальных физических законов сохранения построена математическая модель сплошной среды, представляющая собой совокупность интегральных законов сохранения.

2.2 Описание движения сплошной среды

Пусть некоторое поле (скалярное, векторное, тензорное) является характеристикой СС (скорость, плотность и т.п.). Рассмотрим два основных способа задания области определения этого поля.

1. **Метод Эйлера**. Данное поле F, для простоты скалярное, определяется на области Ω как функция $x \in \mathbb{R}^3,\ t \in (0, T)$. Другими словами, характеристики сплошной среды рассматриваются в фиксированных точках пространства.

2. **Метод Лагранжа**. Значения поля F определяются на каждой частице среды в любой момент времени $t \in (0, T)$. В частности (хотя это и не обязательно), положение каждой частицы можно индивидуализировать ее координатами $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ в некотором положении Ω_0, соответствующем моменту времени $t = 0$.

Пусть значение поля в данной частице равно $F^0(\xi, t)$. Тогда

$$F^0(\xi, t) = F(\gamma(\xi, t), t) \tag{2.2.1}$$

Координаты (ξ, t) принято называть лагранжевыми, а (x, t) — эйлеровыми.

Вычислим производную поля F по времени в частице. Для этого продифференцируем (2.2.1) по t:

$$\frac{\partial F^0}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t} = F_t + \mathbf{v}\vec{\nabla} F \tag{2.2.2}$$

Дифференциальный оператор, определяемый (2.2.2), называется **полной производной** по времени или производной вдоль траектории.

Примеры:

/1/ Пусть $F = \mathbf{x}$ — векторное поле. В силу (2.2.2) имеем

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(x,t).$$

/2/ Вычислим ускорение частицы среды $\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$.

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_k \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} = \mathbf{v}_t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \left\langle \mathbf{v} \right\rangle.$$

Здесь $\dfrac{d\mathbf{v}}{dx}$ — производный тензор векторного поля $\mathbf{v}$.

Различие между двумя методами наглядно проявляется при решении задачи о построении отображения $x = \gamma(\xi, t)$ по заданному полю скоростей. В методе Лагранжа задача сводится к интегрированию

$$x = \gamma(\xi,t) = \xi + \int_0^t \mathbf{v}(\xi,t)d\tau. \tag{2.2.3}$$

В случае эйлерова описания приходим к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{v}(x,t),\ x(0) = \xi, \tag{2.2.4}$$

и отображение $\xi \to \gamma(\xi,t)$ строится как зависимость от начальных условий в (2.2.4). В том случае, если $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^1$, отображение $\xi \to x$ дифференцируемо и существует якобиан $J = \det\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)$, для которого справедлива формула Эйлера:

$$\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div} \mathbf{V},\ J(0) = 1. \tag{2.2.5}$$

Из (2.2.5) вытекает, что $J(t) > 0$.

Рассмотрим интеграл по движущемуся объему

$$I(t) = \int_{\omega_t} F(x,t)dx = \int_{\omega_0} F^0(\xi,t)Jd\xi.$$

Используя (2.2.5), нетрудно вычислить, что

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\omega_t} \left(\frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} \mathbf{v}\right) dx = \int_{\omega_t} \left(F_t + \operatorname{div}\left(F\mathbf{v}\right)\right) dx. \tag{2.2.6}$$

2.3 Контрольное задание 2

1) Внутренняя энергия среды с плотностью, равной 1, занимающей шар радиуса r равна
$$E(r) = \frac{1}{r}\int_{|x|=r} x_1^2 dS.$$
Найти значение удельной внутренней энергии в точке $x = 0$.

2) Поле скоростей задано в переменных Лагранжа:
$$v_1 = \xi_1 e^t,\ v_2 = \xi_2 + \xi_1 + t^2,\ v_3 = 2t,$$
где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — координаты частицы в момент $t = 0$.

   a) Найти компоненты ускорения в эйлеровых координатах.

   b) Определить величину движущегося объема в любой момент времени, если при $t = 0$ он равен 1.

3) Показать, что движение частиц среды происходит по окружностям, если в эйлеровом описании поле скоростей равно
$$v_1 = x_2 - 2x_3,\ v_2 = x_3 - x_1,\ v_3 = 2x_1 - x_2.$$

Комментарии к задачам.

1) Применив теорему Гаусса-Остроградского, можно перейти к интегралу по объему, а затем воспользоваться определением (2.1.8).

2) Ускорение частицы $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$. Для перехода к эйлеровым координатам необходимо использовать (2.2.3). Величину движущегося объема можно определить, если в (2.2.6) взять $F = 1$, предварительно вычислив $\operatorname{div}\mathbf{v}$.

3) Необходимо расписать уравнение траектории (2.2.4) и показать, что движение с одной стороны плоское, т.е. $ax_1 + bx_2 + cx_3 = C_1$, а, с другой стороны, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = C_2$.

3 Законы сохранения в дифференциальной форме. Тензор напряжений

3.1 Уравнение неразрывности

Для получения основных уравнений механики сплошных сред, потребуем, чтобы все функции, входящие в математическую модель (2.1.4)-(2.1.7), были достаточно гладкими, то есть

$$\begin{gathered} \rho, U, \mathbf{v}, \mathbf{p}_n, q_n \in \mathbb{C}^1(\mathcal{Q}),\ \mathbf{f} \in \mathbb{C}(\mathcal{Q}), \\ \text{где} \quad \mathcal{Q} = \{(x,t):\ x \in \Omega_t,\ t \in (0,T)\} \subset \mathbb{R}^4 \end{gathered} \tag{3.1.1}$$

и, кроме того, $\mathbf{p}_n, q_n$ непрерывны как функции единичного вектора $\mathbf{n}$. В этом случае движение называется непрерывным.

В классе таких движений закон сохранения массы на основании формулы (2.2.6) принимает вид

$$\int\limits_{\omega_t} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dx = 0 \ \ \forall \omega_t.$$

В силу произвольности объема ω_t отсюда вытекает уравнение

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \ \ \text{или} \ \ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \tag{3.1.2}$$

Используя (2.2.6) и (3.1.2), нетрудно получить удобную формулу

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\omega_t} \rho F dx = \int\limits_{\omega_t} \rho \frac{dF}{dt} dx. \tag{3.1.3}$$

3.2 Тензор напряжений

Применяя (3.1.3), можно переписать закон сохранения импульса в виде

$$\int\limits_{\partial\omega_t} \mathbf{p}_n dS = \int\limits_{\omega_t} \mathbf{W} dx, \quad \mathbf{W} = \rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{f} \right), \tag{3.2.1}$$

что позволяет доказать линейность отображения $\mathbf{n} \mapsto \mathbf{p}_n$.

Теорема. На области $\mathcal{Q}$ сущесвует тензорное поле $P: \ Q \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ тензоров ранга 2 такое, что

$$\mathbf{p}_n = P\langle \mathbf{n} \rangle. \tag{3.2.2}$$

Оператор P называется тензором напряжений. Подставив (3.2.2) в (3.2.1) и применив теорему Гаусса-Остроградского, получим в силу произвольности объема ω_t уравнение **импульсов**

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{div} P + \rho \mathbf{f}. \tag{3.2.3}$$

Следствием другого фундаментального закона, а именно закона сохранения момента импульса, является симметрия тензора напряжений $P^* = P$.

Замечание 3.2.1 Существует по крайней мере одна система координат (главная система), в которой матрица оператора P является диагональной. При этом величины, стоящие на главной диагонали, то есть собственные значения P, называются нормальными напряжениями. Главными осями тензора P называют направления $\mathbf{e}$, для которых $P\langle \mathbf{e} \rangle$ и $\mathbf{e}$ коллинеарны.

Замечание 3.2.2 Если тензор P шаровой, то есть $P = -p(x,t)I$, то среда называется **идеальной**, а коэффициент $p(x,t)$ — **давлением**.

3.3 Уравнение энергии

Применим равенство (3.1.3) к закону сохранения энергии. Тогда, с учетом симметрии тензора P, получим

$$\int\limits_{\partial\omega_t} q_n dS = \int\limits_{\omega_t} \Psi dx, \quad \Psi = \rho \frac{d}{dt}\left(U + \frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) - \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}) - \operatorname{div} P\langle \mathbf{v} \rangle. \tag{3.3.1}$$

Соотношение (3.1.3) позволяет доказать линейность функционала $\mathbf{n} \mapsto q_n$, а значит и существование векторного поля $\mathbf{q}(x,t)$ (вектора потока тепла) такого, что

$$q_n = -\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}. \tag{3.3.2}$$

Вектор $\mathbf{q}$ направлен внутрь ω_t, когда $q_n > 0$.

Из интегрального закона (3.3.1), пользуясь теоремой Гаусса — Остроградского, уравнением (3.2.3) и произвольностью объема ω_t, получаем

$$\rho\frac{dU}{dt} = \operatorname{div} P\left\langle \mathbf{v} \right\rangle - \mathbf{v}\cdot\mathbf{div}\, P - \operatorname{div}\mathbf{q}.$$

Тензор $D = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} + \dfrac{\partial\mathbf{v}^*}{\partial x}\right)$ называется тензором скоростей деформаций и для него справедлива формула

$$P : D = \operatorname{div} P\left\langle \mathbf{v} \right\rangle - \mathbf{v}\cdot\mathbf{div}\, P$$

, в силу которой окончательно получаем уравнение **энергии**

$$\rho\frac{dU}{dt} = P : D - \operatorname{div}\mathbf{q}. \tag{3.3.3}$$

Замечание 3.3.1 Система интегральных законов сохранения, сформулированных в аксиоме баланса, равносильна на классе непрерывных движений системе дифференциальных уравнений (3.1.2), (3.2.3), (3.3.3) вместе с условием симметрии $P = P^*$. Однако указанная система не является замкнутой, поскольку содержит 5 скалярных уравнений и 14 неизвестных функций.

3.4 Элементы термодинамики

При построении математических моделей механики сплошных сред, предположим справедливость следующих аксиом

Аксиома T1. На области Ω_t, занимаемой сплошной средой, определены скалярная функция $\theta(x,t) \geq 0$ — абсолютная температура, и функция множеств $\mathcal{S}(\omega) = \int_\omega \rho s\, dx$ — энтропия множества ω; s — удельная энтропия. При этом справедливо равенство $dQ = \theta ds$, где Q — количество теплоты.

Аксиома T2. Для сплошной среды справедливы первый и второй законы термодинамики, то есть

$$dQ = dU + dA, \tag{3.4.1}$$

где $dQ = \theta ds$, dA — совершаемая средой в элементарном процессе механическая работа, dU — изменение внутренней энергии среды.

$$\frac{d\mathcal{S}(\omega_t)}{dt} \geq -\int\limits_{\partial\omega_t} \frac{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{n})}{\theta} dS. \tag{3.4.2}$$

Справедлив закон Фурье

$$\mathbf{q} = -\kappa\nabla\theta, \qquad \kappa \text{ - коэффициент теплопроводности.} \tag{3.4.3}$$

Из (3.4.2) следует, что энтропия теплоизолированного объема не убывает с течением времени. В общем случае из второго закона термодинамики вытекает **неравенство Клаузиуса**:

$$\rho\frac{ds}{dt} + \operatorname{div}\left(\theta^{-1}\mathbf{q}\right) \geq 0. \tag{3.4.4}$$

Уравнение энергии с учетом (3.4.3) принимает вид

$$\rho\frac{dU}{dt} = P : D + \operatorname{div}(\kappa\vec{\nabla}\theta). \tag{3.4.5}$$

3.5 Контрольное задание 3

1) Поле скоростей стационарно движущейся среды задается выражениями

$$v_1 = -g(r)x_2,\ v_2 = g(r)x_1,\ v_3 = h(r),\ r^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Показать, что при таком движении плотность в частице не меняется.

2) В некоторой точке задана матрица компонент тензора напряжений

$$(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить число a так, чтобы вектор напряжений на некоторой площадке в этой точке обращался в нуль. Найти единичную нормаль к этой площадке.

3) Давление на границе объема ω покоящейся идеальной среды постоянно. Показать, что сумма внешних сил, действующих на ω, равна нулю.

4) Внутренняя энергия неподвижного объекта среды с постоянной теплопроводностью возрастает со временем. Может ли максимум температуры достигаться внутри данного объема?

Комментарии к задачам

1) Сохранение плотности в частице означает, что $\dfrac{d\rho}{dt} = 0$. В силу уравнения неразрывности достаточно проверить, что $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

2) Необходимо воспользоваться равенством (3.2.2), учитывая, что $|\mathbf{n}| = 1,\ \mathbf{p}_n = 0$.

3) Так как среда неподвижная и идеальная, то в уравнении импульсов следует положить $\mathbf{v} = 0,\ P = -pI$ и проинтегрировать по объему ω.

4) Из уравнения энергии (3.4.5) вытекает, что в данном случае $\Delta\theta > 0$. Тогда из принципа максимума для оператора Лапласа следует, что максимум θ может достигаться только на границе.

4 Классические модели сплошных сред

4.1 Жидкости и газы

Жидкостью или газом (в классическом смысле) называют сплошную среду, в которой тензор напряжений P является линейной функцией тензора скоростей деформаций D в соответствии с законом Стокса

$$P = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v})I + 2\mu D. \qquad (4.1.1)$$

Функция p называется давлением, $\lambda,\ \mu$ — коэффициенты сдвиговой и динамической вязкости. В общем случае λ и μ являются функциями термодинамических параметров.

Для построения замкнутой системы уравнений жидкости или газа будем считать известной зависимость $U = U(\rho, s)$, предполагая, что механическая работа, совершаемая средой, определяется выражением

$$dA = pd(\rho^{-1}) = -\frac{pd\rho}{\rho^2}. \tag{4.1.2}$$

Закон Стокса позволяет вычислить $\mathbf{div}P$ и $P : D$. В случае постоянных коэффициентов вязкости получаем

$$\mathbf{div}P = -\vec{\nabla}p + \lambda\vec{\nabla}(\mathrm{div}\,\mathbf{v}) + 2\mu\mathbf{div}D, \tag{4.1.3}$$

$$P : D = -p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} + \Phi, \tag{4.1.4}$$

где выражение $\Phi = (\lambda + \frac{2}{3}\mu)(\mathrm{div}\,\mathbf{v})^2 + 2\mu D' : D'$ носит название диссипативной функции, D' — девиатор тензора D. Из (4.1.2), применяя первый закон термодинамики, заключаем, что

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial s}, \quad p = \rho^2\frac{\partial U}{\partial \rho}, \tag{4.1.5}$$

$$\rho\frac{dU}{dt} = \rho\theta\frac{ds}{dt} - p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}. \tag{4.1.6}$$

Тогда, подставляя полученные выражения в уравнения неразрывности, импульсов и энергии, приходим к следующей замкнутой системе

$$M0\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0,\ \theta = \dfrac{\partial U}{\partial s},\ p = \rho^2\dfrac{\partial U}{\partial \rho}, \\ \rho\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = -\vec{\nabla}p + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}(\mathrm{div}\,\mathbf{v}) + \mu\Delta\mathbf{v} + \rho\mathbf{f}, \\ \quad\rho\theta\dfrac{ds}{dt} = \mathrm{div}\,(\kappa\vec{\nabla}\theta) + \Phi, \end{cases}$$

которая называется классической моделью жидкости или газа и содержит 7 неизвестных функций и 7 скалярных уравнений.

4.2 Вязкая несжимаемая жидкость

Сплошная среда называется **несжимаемой**, если плотность сохраняется вдоль траекторий, то есть $d\rho/\,dt = 0$. Из уравнения неразрывности сразу вытекает, что поле скоростей соленоидально, то есть $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$. Используя это условие и конкретизируя первые два уравнения в $M0$, приходим к замкнутой системе, являющейся моделью несжимаемой неоднородной вязкой жидкости

$$M1\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v}\vec{\nabla}\rho = 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \\ \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\vec{\nabla}p + \mu\Delta\mathbf{v} + \rho\mathbf{f}. \end{cases}$$

В случае однородной жидкости, то есть при $\rho = Const$, из $M1$ получается классическая система **уравнений Навье-Стокса**:

$$M2\begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \\ \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = -\dfrac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad \nu = \rho^{-1}\mu. \end{cases}$$

Здесь ν — коэффициент кинематической вязкости.

Замечание 4.2.1 В рамках модели $M2$ просто вычислить, как меняется с течением времени кинетическая энергия объема жидкости. Если обозначить

$$E(t) = \int_{\omega_t} \frac{\rho\mathbf{v}^2}{2} dx,$$

то при отсутствии внешних массовых сил получаем:

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\partial\omega_t} (\mathbf{p}_n\mathbf{v})dS - \int_{\omega_t} \Phi dx, \quad \Phi = 2\mu D : D \tag{4.2.1}$$

Первый член в правой части (4.2.1) представляет собой суммарную мощность поверхностных сил, а второй определяет скорость **диссипации** энергии, то есть количество механической энергии, которое за единицу времени переходит в тепловую энергию (и отсюда название Φ – диссипативная функция).

Отметим, что поскольку $\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}\langle\mathbf{v}\rangle$, то модели $M0$–$M2$ являются нелинейными. В том случае, если

$$|\mathbf{v}|, \ \left|\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_k}\right|, \ \frac{1}{\nu} \ll 1, \tag{4.2.2}$$

в модели $M2$ можно пренебречь квадратичными членами и получить линейную **модель Стокса**

$$M3 \begin{cases} \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} - \nu \Delta \mathbf{v} = -\vec{\nabla} p + \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

4.3 Идеальная (невязкая) жидкость

Обусловленные наличием вязкости эффекты (диссипация, рост энтропии, диффузия вихрей и т.п.) не всегда существенны и поэтому большое распространение получила модель, в которой вязкость равна нулю, то есть среда считается идеальной. Исторически — это первая модель гидродинамики.

$$M4: \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p + \mathbf{f}, \ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Система $M4$ носит название уравнений Эйлера для несжимаемой идеальной жидкости.

Наиболее простой вид модель идеальной жидкости имеет для потенциальных или безвихревых течений. В этом случае $\mathbf{v} = \vec{\nabla}\varphi$ и из уравнения неразрывности вытекает, что потенциал φ — гармоническая функция,

$$\Delta \varphi = 0, \tag{4.3.1}$$

при этом для выполнения уравнения импульсов достаточно потенциальности внешних сил.

4.4 Уравнения газовой динамики и акустики

Если считать, что процессы, протекающие в сплошной среде (газе), описываемой моделью $M0$ — быстропротекающие, то можно пренебречь вязкостью и теплопроводностью среды ($\kappa = 0, \mu = \lambda = 0$), получив модель невязкого нетеплопроводного газа (уравнения газовой динамики)

$$M5 \begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \ \rho \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \rho \mathbf{f}, \\ p = p(\rho, s), \ \dfrac{ds}{dt} = 0. \end{cases}$$

Колебательные движения с малыми амплитудами сплошной среды, описываемой системой $M5$, называются **звуковыми волнами**. В окрестности некоторого равновесного состояния $\rho = \rho_0, \ s = s_0, \ p_0 = p(\rho_0, s_0)$ можно провести линеаризацию модели $M5$. В результате получается система линейных уравнений акустики

$$M6: \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p = \mathbf{f}, \ \frac{1}{c^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Здесь через c^2 обозначена величина

$$c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho = \rho_0} > 0. \tag{4.4.1}$$

Знак производной в (4.4.1) обусловлен тем, что давление всегда растет с увеличением скорости. Величина c называется **скоростью звука**. Смысл такого названия становится понятным, если в $M6$ исключить скорость и для давления получить получить волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = F, \ \ F = -c^2 \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{f}, \tag{4.4.2}$$

в котором c играет роль скорости распространения возмущений.

Весьма интересными для приложений являются гармонические процессы, для которых зависимость характеристик звукового поля от времени имеет вид:

$$p = Re[\Phi(x) e^{-ikct}], \ \mathbf{v} = Re[\mathbf{V}(x) e^{-ikct}], \ F = Re[\varphi(x) e^{-ikct}].$$

В этом случае из (4.4.2) для функции Φ получается стационарное уравнение Гельмгольца

$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = g, \ \ g = -\frac{\varphi}{c^2}, \tag{4.4.3}$$

где $k = \omega / c$ — волновое число.

4.5 Тензор деформаций. Линейная модель упругого тела

Деформацией объема ω_0 сплошной среды называется такое движение среды и связанное с ним отображение $x = \gamma(\xi, t),\ \xi \in \omega_0,\ t \in (0, T)$, при котором меняются расстояния между частицами. Аналитическое описание деформации в малой окрестности частицы можно дать с помощью **тензора дисторсии** (искажения) $T = \dfrac{\partial x}{\partial \xi}$. Если определить вектор перемещения $\mathbf{w} = x - \xi$, то

$$T = I + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi}. \tag{4.5.1}$$

Отметим, что из (2.2.5) вытекает невырожденность тензора T. В силу соотношения

$$|dx|^2 = |d\xi|^2 + d\xi \cdot (T^*T - I)\langle d\xi\rangle$$

для описания деформаций удобно ввести также тензор

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left(T^*T - I\right), \tag{4.5.2}$$

называемый **тензором деформаций** в форме Грина-Лагранжа. При этом из (4.5.1) вытекает равенство

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial \xi}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial \xi}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi}. \tag{4.5.3}$$

В рамках линейной теории, при условии малости величины $d = \|T - I\|$, в (4.5.3) отбрасывается последнее слагаемое, имеющее порядок d^2. Кроме этого, в линейной теории упругости часто пренебрегают влиянием температуры на напряжения, а характеристики сплошной среды, различающиеся на величины порядка d^2 и выше, отождествляются. Сплошная среда, описываемая уравнениями (3.1.2), (3.2.3) и (3.3.3) называется **упругим телом**, если напряжения определяются деформациями в соответствии с законом Гука (среда изотропна):

$$P = \lambda \operatorname{tr}\mathcal{E} \cdot I + 2\mu \cdot \mathcal{E}. \tag{4.5.4}$$

Записав уравнение импульсов для упругого тела в лагранжевой системе координат и линеаризовав его, используя (4.5.4), приходим к системе **уравнений Ламе**,

$$M7: \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\mathbf{w} + \mu\Delta\mathbf{w} + \rho_0\mathbf{f}.$$

Здесь λ, μ — коэффициенты Ламе.

Вектор перемещения $\mathbf{w}$, описывающий переход упругого тела из положения ω_0 в новое стационарное состояние, удовлетворяет стационарному векторному уравнению Ламе

$$\mu\Delta\mathbf{w} + (\lambda + \mu)\nabla\,\mathrm{div}\,\mathbf{w} + \rho_0\mathbf{f} = 0 \quad \text{или} \quad \mathrm{div}\,P + \rho_0\mathbf{f} = 0. \tag{4.5.5}$$

Из (4.5.5) вытекает при $\mathbf{f} = 0$, что $\Delta\,\mathrm{div}\,\mathbf{w} = 0$, $\Delta^2\mathbf{w} = 0$, т.е. $\mathbf{w}$ — бигармоническая функция.

4.6 Контрольное задание 4

1) Доказать, что если в непрерывном движении в некоторой точке плотность $\rho = 0$, то $\rho = 0$ вдоль всей траектории, проходящей через эту точку.

2) Найти распределение давления и плотности в неподвижной атмосфере, в которой давление и плотность связаны равенством $p = p_0\left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$, $\gamma \geq 1$, ρ_0 — плотность на поверхности.

3) Показать, что в конечной односвязной области с неподвижной стенкой невозможно создать безвихревое движение несжимаемой среды.

4) Слой жидкости толщиной h ограничен сверху свободной поверхностью, а снизу плоскостью, наклоненной под углом α к горизонту. Определить движение жидкости под влиянием силы тяжести.

5) Определить среднее значение по объему для компонент тензора напряжений, возникающих в твердом теле под действием поверхностных нагрузок $\mathcal{P}$.

Комментарии к задачам

1) Достаточно проинтегрировать уравнение неразрывности вдоль траектории.

2) В рамках модели $M5$ легко решить уравнение импульсов, если положить $\mathbf{v} = 0$. Из условия $\rho = 0$ можно определить высоту атмосферы.

3) Решение задачи вытекает из уравнения (4.3.1) и единственности задачи Неймана для него.

4) Требуется решить уравнение модели $M2$ с учетом того, что на свободной поверхности нормальное напряжение равно атмосферному давлению, а касательные напряжения отсутствуют.

5) Необходимо записать уравнение равновесия (4.5.5) в напряжениях с $\mathbf{f} = 0$, умножить на x_j и проинтегрировать по области, применив формулу интегрирования по частям.

Список литературы

Овсянников Л.В. Введение в механику сплошных сред. Новосибирск: НГУ, 1976.

Жермен П. Курс механики сплошных сред. М.: Мир, 1983.

Ильюшин А.А. и др. Задачи и упражнения по механике сплошных сред. М.: МГУ, 1979.