§1 Неоднородные и однородные системы. Некоторые свойства решений линейных систем.

Линейная система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + ... + a_{1n}(x)y_n + g_1(x) \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + ... + a_{2n}(x)y_n + g_2(x) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + ... + a_{nn}(x)y_n + g_n(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

Обозначим $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}$, $A(x) = \{a_{ij}(x)\} \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$

Тогда система (1.1) в векторном виде записывается так:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \tag{1.2}$$

Будем предпологать, что A(x) и g(x) определены и непрерывны для любого $x \in (a, b)$ $a \geq -\infty$, $b \leq +\infty$.

Тогда правая часть системы (1.2) будет определена и непрерывна в области $G = \{a < x < b, \ \|y\| < +\infty\}$. По теореме гл.? при сделанных предположениях область G является областью единственности для системы (1.2) и любое решение системы (1.2) определено и непрерывно на (a,b).

Если $g(x) \not\equiv 0$ на (a,b), то система (1.2) - называется линейной неоднородной системой, если $g(x) \equiv 0$ на (a,b), то имеем линейную однородную систему:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A(x)\mathbf{y} \tag{1.3}$$

Вектор $\mathbf{y} = 0$ для $\forall x \in (a.b)$ - очевидно решение уравнения (1.3).

Если

$$\varphi_{\mathbf{1}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) \\ \varphi_{21}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{n1}(x) \end{pmatrix}, \varphi_{\mathbf{2}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_{12}(x) \\ \varphi_{22}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{n2}(x) \end{pmatrix}, \dots, \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_{1k}(x) \\ \varphi_{2k}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{nk}(x) \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

есть k решений уравнения (1.3), то k-столбцевая матрица

$$\Phi_k(x) = (\varphi_{\mathbf{1}}(\mathbf{x}), \dots, \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) & \dots & \varphi_{1k}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(x) & \dots & \varphi_{nk}(x) \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

будет также решением уравнения (1.3), т.е.

$$\frac{d\Phi_k(x)}{dx} = A(x)\Phi_k(x)\ ,\ \ x \in (a,b) \qquad (1.6)$$

Действительно, т.к. (1.4) есть решения, то имеем k тождеств:

$$\frac{d\varphi_{\mathbf{1}}(\mathbf{x})}{dx} = A(x)\varphi_{\mathbf{1}}(\mathbf{x}), \frac{d\varphi_{\mathbf{2}}(\mathbf{x})}{dx} = A(x)\varphi_{\mathbf{2}}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{d\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})}{dx} = A(x)\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$$

это можно записать:

$$\frac{d\Phi_k(x)}{dx} = A(x)\Phi_k(x) \qquad (1.7)$$

что и требовалось доказать.

Если $\Phi_k(x)$ есть k-столбцевая матрица системы (1.3), то вектор-функция $\Phi_k(x)\mathbf{C}$, где $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_k \end{pmatrix}$ - любой постоянный ветор, есть также решение системы (1.3).

Действительно имеет место тождество (1.7), умножая (1.7) на $\mathbf{C}$ справа, получим

$$\frac{d\Phi_k(x)}{dx} \cdot \mathbf{C} = A(x)\Phi_k(x) \cdot \mathbf{C},\ \forall x \in (a,b).$$

Или, по свойству производной и ассоциативности умножения матриц имеем

$$\frac{d[\Phi_k(x) \cdot \mathbf{C}]}{dx} = A(x)[\Phi_k(x) \cdot \mathbf{C}],$$

что и требовалось доказать.

Замечание.

$$\Phi_k(x)\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x)C_1 + \ldots + \varphi_{1k}(x)C_k \\ \vdots \\ \varphi_{n1}(x)C_1 + \ldots + \varphi_{nk}(x)C_k \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\Phi_k(x) \cdot \mathbf{C} = \varphi_{\mathbf{1}}(\mathbf{x}) \cdot C_1 + \ldots\ + \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \cdot C_k.$$

Известные из алгебры определения линейной независимости векторов можно перефразировать так:

Определение 1. k - вектор-функций $\varphi_{\mathbf{1}}(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ называются линейно независимыми на (a,b), если не существует такого постоянного k - мерного вектора $\mathbf{C} \neq 0$, что имеет место равенство :

$\Phi_k(x)\mathbf{C} = 0, \ \ \forall x \in (a,b).$

Определение 2. k - вектор-функций $\varphi_{\mathbf{1}}(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ называются линейно зависимыми на (a,b), если существует k - мерный вектор $\mathbf{C} \neq 0$, такой что имеет место равенство : $\Phi_k(x)\mathbf{C} = 0, \ \forall x \in (a, b)$.

§2 Необходимые и достаточные условия линейной независимости k решений линейной однородной системы.

Рассмотрим уравнение (1.3).

Пусть $\exists$ k решений системы (1.3):

$$\varphi_{\mathbf{1}}(\mathbf{x}), \varphi_{\mathbf{2}}(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

Составим матрицу

$$\Phi_k(x) = (\varphi_{\mathbf{1}}(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})).$$

Теорема 1. Если k решений (2.1) линейно зависимы на (a,b), то ранг матрицы $\Phi_k(x)$ из этих решений меньше k при всех $x \in (a, b)$.

Доказательство. По определению линейной зависимости (2.1) $\exists$ k-мерный вектор $\mathbf{C}$ такой, что

$$\Phi_k(x) \cdot \mathbf{C} = 0, \ x \in (a, b).$$

По предположению для любых $x \in (a, b)$ эта система имеет ненулевое решение. Тогда ранг $\Phi_k(x) < k$ для $\forall x \in (a, b)$. Что и требовалось доказать.

Замечание. Эта теорема справедлива для $\forall$ k линейно зависимых решений.

Теорема 2. Если k решений (2.1) системы (1.3) линейно независимы на (a,b), то $\Phi_k(x)$ имеет ранг k при всех $x \in (a, b)$.

Доказательство. Пусть решения (2.1) линейно независимы, и тем не менее $\exists$ точка $\xi \in (a, b)$, в которой $rang\Phi_k(x) < k$. Рассмотрим следующую систему линейных однородных уравнений:

$$\Phi_k(\xi) \cdot \mathbf{C} = 0.$$

Эта система имеет ненулевое решение, т.к. $rang\Phi_k(x) < k$: существует $\mathbf{C} = \mathbf{C^0} \neq 0$, так что

$$\Phi_k(\xi) \cdot \mathbf{C^0} = 0.$$

Рассмотрим вектор-функцию

$$\mathbf{y} = \Phi_k(x) \cdot \mathbf{C^0} \tag{2.2}$$

(2.2) - решение системы (1.3), удовлетворяет начальному условию

$$\mathbf{y} = 0 \text{ при } x = \xi.$$

Но этому же начальному условию удовлетворяет и решение $\mathbf{y} \equiv 0$. Отсюда, вследствие единственности решения задачи Коши, имеем:

$$\Phi_k(x) \cdot \mathbf{C^0} = 0 \ \forall x \in (a,b), \text{ где } \mathbf{C^0} \neq 0$$

, а это противоречит предположению линейной независимости (2.1). Что и требовалось доказать.

Следствие 1. Система (1.3) не может иметь больше n линейно независимых решений, т.к. rang матрицы $\Phi_k(x) \leq k \quad \forall x \in (a,b)$

Следствие 2. Для того, чтобы k решений (2.1) системы (1.3) были линейно независимыми на (a,b), необходимо и достаточно, чтобы $\Phi_k(x)$ имела ранг k хотя бы в одной $(\cdot)$ (a,b), при этом она будет иметь ранг при всех x из (a,b). Это вытекает из двух теорем.

Пусть k=n. Обозначим через $\Phi(x)$ матрицу, составленную из n решений системы (1.3). Для того, чтобы n решений системы (1.3) были линейно независимыми $\forall x \in (a,b)$, необходимо и достаточно, чтобы определитель $\Phi(x) \neq 0$ для $\forall x \in (a,b)$.

Определение 1. Совокупность n линейно независимых решений системы (1.3) называется фундаментальной, а матрица $\Phi(x)$, составленная из этих решений называется фундаментальной матрицей системы (1.3).

§3 Существование фундаментальной матрицы. Построение общего решения линейной однородной системы.

Рассмотрим систему (1.3), где A(x) непрерывна на (a,b).

Теорема 1. На промежутке непрерывности коэффициентов всегда существует фундаментальная матрица.

Доказательство. Возьмём любую точку $\xi \in (a,b)$. Зададим n произвольных векторов

$$\eta_{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} \eta_{1s} \\ \eta_{2s} \\ \vdots \\ \eta_{ns} \end{pmatrix} \quad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

подчиним их условию, что матрица

$$\gamma = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \dots & \eta_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{n1} & \eta_{n2} & \dots & \eta_{nn} \end{pmatrix}$$

имеет определитель, отличный от нуля, т.е. $Det(\gamma) \neq 0$.

Поставим n начальных условий:

$$\mathbf{y} = \eta_{\mathbf{s}}, \quad x = \xi \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

По теореме существования и единственности решения задачи Коши этими начальными значениями однозначно определяется n решений системы (1.3):

$$\varphi_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_{1s}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{ns}(x) \end{pmatrix} \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

Рассмотрим матрицу

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nn} \end{pmatrix}$$

Принимая во внимание начальные значения, получим, что

$\Phi(\xi) = \gamma$, а т.к. $Det(\gamma) \neq 0$, то отсюда

следует, что $\Phi(x)$ есть фундаментальная матрица, а построенная система решений является фундаментальной.

Теорема 2. Если $\Phi(x)$ есть фундаментальная матрица системы (1.3), то

$$\mathbf{y} = \Phi_k(x) \cdot \mathbf{C}, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_k \end{pmatrix}$ - $\forall$ вектор, есть общее решение системы (1.3) в области G.

Доказательство. По свойству 3 §1 выражение (3.1) является решением системы (1.3) для $\forall \mathbf{C} = const$. Нам осталось показать, что при соответствующем выборе вектора $\mathbf{C}$ выражение (3.1) определяет решение $\forall$ задачи Коши из области G.

Возьмём любую точку $(\xi, \eta) \in G$ и положим

$$\mathbf{y} = \eta \quad \text{при } x = \xi.$$

Потребуем, чтобы (3.1) удовлетворяло этому условию, тогда мы должны иметь

$$\Phi(\xi) \cdot \mathbf{C} = \eta. \tag{3.2}$$

Это есть неоднородная линейная система относительно компонент вектора $\mathbf{C}$, а т.к. $\Phi(x)$ - фундаментальная матрица на (a,b), то $Det(\xi) \neq 0$ и система (3.2) имеет единственное решение. Для этого нужно (3.2) умножить на $\Phi^{-1}(\xi)$:

$$\mathbf{C} = \Phi^{-1}(\xi) \cdot \eta.$$

Подставляя это выражение в (3.1), получим

$$\mathbf{y} = \Phi^{-1}(\xi) \cdot \Phi(\xi) \cdot \eta = \eta.$$

Что и требовалось доказать.

§4 Построение всего множества фундаментальных матриц линейной однородной системы.

Из предыдущего параграфа следует, что для того, чтобы матрица $\Phi(x)$ была фундаментальной для системы (1.3), необходимо и достаточно выполнения следующих условий

$$1)\frac{d\Phi(x)}{dx} = A(x)\Phi(x) \quad \forall x \in (a,b) \tag{4.1}$$

$$2) Det(\Phi(x)) \neq 0 \qquad \forall x \in (a,b)$$

Возьмём любую постоянную матрицу C:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}, \text{ где Det(C)} \neq 0.$$

И умножим на эту матрицу C фундаментальную матрицу $\Phi(x)$ системы (1.3), тогда получим

$$\Phi(x) \cdot C \tag{4.2}$$

Покажем, что матрица (4.2) есть также фундаментальная матрица системы (1.3). Для этого умножим (4.1) на C справа, тогда:

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} \cdot C = A(x)\Phi(x) \cdot C$$

$$\frac{d(\Phi(x) \cdot C)}{dx} = A(x)(\Phi(x) \cdot C)$$

$$Det(\Phi(x) \cdot C) = Det(\Phi(x)) \cdot Det(C) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

Отсюда следует, что (4.2) удовлетворяет системе (1.3).

Теорема. Если $\Phi(x)$ есть произвольная фундаментальная матрица системы (1.3) на (a,b), то $\Phi(x) \cdot C$ описывает всё множество фундаментальных матриц, где C - $\forall$ const матрицы.

Доказательство. Пусть $\Psi(x)$ есть произвольная фундаментальная матрица системы (1.3). Покажем, что при соответствующем выборе C эта матрица содержится в (4.2).

Возьмём любую точку $\xi \in (a, b)$ и потребуем, чтобы:

$$\Psi(\xi) = \Phi(\xi) \cdot C$$

Умножая это равенство слева на $\Phi^{-1}(\xi)$ мы однознчно определим C:

$$C = \Phi^{-1}(\xi)\Psi(\xi), \quad Det(C) \neq 0$$

Подставляя найденные значения C в (4.2), получим

$$\Phi(x)\Phi^{-1}(\xi)\Psi(\xi).$$

Значение этой матрицы и матрицы $\Psi(x)$ в точке ξ совпадают, а тогда в силу единственности эти матрицы - решения равны на всем (a,b):

$$\Psi(x) = \Phi(x)\Phi^{-1}(\xi)\Psi(\xi) \quad \forall x \in (a, b).$$

Что и требовалось доказать.

§5. Неоднородные системы. Построение общего решения методом вариации произвольных постоянных.

Рассмотрим линейную неоднородную систему n-го порядка:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \tag{1.2}$$

Пусть $\mathbf{\Psi}(\mathbf{x})$ есть какое-либо решение системы (1.2). Тогда имеем:

$$\frac{d\mathbf{\Psi}(\mathbf{x})}{dx} = A(x)\mathbf{\Psi}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \forall x \in (a, b). \tag{5.1}$$

Преобразуем (1.2) посредством подстановки:

$$\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{\Psi}(\mathbf{x}), \tag{5.2}$$

где $\mathbf{z}$ - неизвестная функция. Получим:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dx} + \frac{d\mathbf{\Psi}(\mathbf{x})}{dx} = A(x)\mathbf{z} + A(x)\mathbf{\Psi}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \forall x \in (a, b).$$

Откуда

$$\frac{d\mathbf{z}}{dx} = A(x)\mathbf{z}, \tag{5.3}$$

т.е. решение неоднородной системы сводится к решению однородной системы (5.3) с помощью подстановки (5.2).

Пусть $\Psi(x)$ - фундаментальная матрица системы (5.3), тогда как было показано

$$\mathbf{z} = \Phi(z) \cdot \mathbf{C}, \tag{5.4}$$

где $\mathbf{C}$ - любой постоянный n-мерный вектор, есть общее решение системы (5.3) в области G. Подставляя (5.3) в (5.2), получим общее решение системы (1.2):

$$\mathbf{y} = \Phi(x) \cdot \mathbf{C} + \mathbf{\Psi}(\mathbf{x}) \tag{5.4}$$

Итак общее решение неоднородной системы есть сумма общего решения однородной системыи какого-либо решения неоднородной системы.

Теорема. Если известно общее решение однородной системы (1.3), то общее решение соответствующей неоднородной системы (1.2) находится в квадратуре.

Доказательство. Будем искать решение системы (1.3) в виде

$$\mathbf{y} = \Phi(x) \cdot \mathbf{C}(\mathbf{x}), \tag{5.5}$$

где C(x) есть некоторая, пока неопределенная, непрерывная дифференцируемая вектор-функция на (a,b). Подставим (5.5) в систему (1.2), тогда:

$$\frac{d\Phi(x)}{dx}\cdot \mathbf{C(x)} + \Phi(x)\cdot\frac{d\mathbf{C(x)}}{dx} = A(x)\Phi(x)\mathbf{C(x)} + \mathbf{g(x)}.$$

Так как $\Phi(x)$ - фундаментальная матрица системы (1.3), то имеем

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = A(x)\cdot\Phi(x), \qquad \forall x\in(a,b)$$

, то

$$\Phi(x)\cdot\frac{d\mathbf{C(x)}}{dx} = \mathbf{g(x)} \tag{5.6}$$

Мы получим линейную неоднородную алгебраическую систему для определения C'(x), где $Det(\Phi(x)) \neq 0$, для $\forall x \in (a,b)$, а тогда система (5.6) имеет единственное решение:

$$\frac{d\mathbf{C(x)}}{dx} = \Phi^{-1}(x)\mathbf{g(x)}, \quad \forall x\in(a,b)$$

Интегрируя её на (ψ,x), получим:

$$\mathbf{C(x)} = \int\limits_{\psi}^{x}\Phi^{-1}\mathbf{g(x)}di + \mathbf{C(x)}$$

Подставляя в (5.5) получим:

$$\mathbf{y} = \Phi(x)\mathbf{C} + \Phi(x)\int\limits_{\psi}^{x}\Phi^{-1}\mathbf{g(x)}di,$$

где $\mathbf{C} - \forall$ постоянный вектор.

Отсюда следует, что мы получили решение системы (1.2). Что и требовалось доказать.

Пример:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 - \cos x \\ \frac{dy_2}{dx} = -y_2 + \sin x \end{cases}$$

Запишем линейную однородную систему

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dx} = z_2 \\ \frac{dz_2}{dx} = -z_1 \end{cases}$$

Фундаментальная матрица имеет вид (её нахождение будет показано в следующем параграфе, где будут рассматриваться системы с постоянными коэффициентами):

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

Решения неоднородной системы имеют вид:

$$\begin{cases} y_1 = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x \\ y_2 = -C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x \end{cases}$$

Система для нахождения $C_1(x), C_2(x)$ имеет вид:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = -\cos x \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \sin x \end{cases}$$

Отсюда $C_1'(x) = -1$ и $C_1(x) = -x + \tilde{C}_1$, $C_2'(x) = 0$ и $C_2(x) = \tilde{C}_2$, где $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2 - \forall\ const$

Тогда

$$\begin{cases} y_1 = \tilde{C}_1(x)\cos x + \tilde{C}_2(x)\sin x - x\cos x \\ y_2 = -\tilde{C}_1(x)\sin x + \tilde{C}_2(x)\cos x + x\cos x \end{cases}$$

§6 Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим однородную систему с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A \cdot \mathbf{y}, \tag{6.1}$$

где A - вещественная постоянная матрица

По доказанному в гл.? решение этой системы существует на $(-\infty, +\infty)$. Будем искать решение системы (6.1) в виде:

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}e^{\kappa x}, \tag{6.2}$$

где $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix}$ - есть некоторый, пока неопределенный вектор, а κ - некоторая неопределенная вещественная постоянная.

Подставляя (6.2) в (6.1), получим:

$$\mathbf{S}\kappa e^{\kappa x} = A \cdot \mathbf{S}e^{\kappa x}$$

заметим, что $\mathbf{S}x = x\mathbf{S} = xE\mathbf{S}$, где E - единичная матрица порядка $n \times n$.

Тогда имеем :

$$(A - \kappa E)\mathbf{S} = 0 \tag{6.3}$$

(6.3) - линейная однородная алгебраическая система для определения компонент вектора $\mathbf{S}$. Т.к. система (6.3) имеет ненулевое решение, то определитель её равен нулю:

$$Det(A - \kappa E) = 0 \tag{6.4}$$

Уравнение (6.4) называют характеристическим. $Det(A - \kappa E)$ представляет многочлен n-ой степени относительно x, следовательно, он имеет n корней.

а) Рассмотрим случай когда все корни (6.4) вещественны и различны: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Подставим найденные x_l $(l = 1, \ldots, n)$ в уравнение (6.3), получим:

$$(A - \kappa_l E)\mathbf{S} = 0.$$

Возьмем ненулевое решение этой системы $\mathbf{S} = \mathbf{S_l} = \begin{pmatrix} S_{1l} \\ S_{2l} \\ \vdots \\ S_{nl} \end{pmatrix}$ и подставим его в (6.2), получим решение системы (6.1):

$$\mathbf{y} = \mathbf{S_l} e^{\kappa_l x}, \quad (l = 1, \ldots, n)$$

В итоге получим n решений, составим из них матрицу

$$\Phi_k(x) = \begin{pmatrix} S_{11}e^{\kappa_1 x} & \ldots & S_{1n}e^{\kappa_n x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1}e^{\kappa_1 x} & \ldots & S_{nn}e^{\kappa_n x} \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

Докажем, что (6.5) - фундаментальная. Предположим противное, тогда $\Phi(x) \cdot \mathbf{C} = 0$, где $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_k \end{pmatrix} \neq 0 - \forall$ постоянный вектор, должно быть верно для $\forall x \in (a, b)$, а это не так.

Так как $\mathbf{C} \neq 0$, то хотя бы один компонент не 0, не нарушая общности, считаем $C_1 \neq 0, \mathbf{S_1} \neq 0$, например $S_{k1} \neq 0$. Возьмем k-ую строку в $\Phi(x) \cdot C$, т.е. $S_{k1}C_1e^{\kappa_1 x} + \ldots + S_{kn}C_ne^{\kappa_n x} = 0, \ \forall x \in (a, b)$. Так как $S_{k1} \neq 0, C_1 \neq 0$, то в этом выражении хотя бы один коэффициент не 0, т.е. $e^{\kappa_1 x}, \ldots, e^{\kappa_n x}$ линейно зависимы, что не так (независимость $e^{\kappa_1 x}, \ldots, e^{\kappa_n x}$ при различных $x_1, \ldots, x_n$ рассматривалась в алгебре). Что и требовалось доказать.

Рассмотрим матрицу

$$s = \begin{pmatrix} S_{11} & \ldots & S_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & \ldots & S_{nn} \end{pmatrix}$$

тогда

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} S_{11} & \ldots & S_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & \ldots & S_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{\kappa_1 x} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & e^{\kappa_n x} \end{pmatrix}$$

Если все корни вещественны, то матрицу S можно построить вещественную и $\Phi(x)$ будет вещественна.

Замечание. Если уравнение (6.1) имеет пару комплексно-сопряженных решений $\mathbf{u(x)} \pm i\mathbf{v(x)}$, где $\mathbf{u(x)}$ и $\mathbf{v(x)}$ - вещественны, то оно имеет вещественных решений $\mathbf{u(x)}$ и $\mathbf{v(x)}$.

Действительно, из того что $\mathbf{y} = \mathbf{u(x)} \pm i\mathbf{v(x)}$ - решения получаем, что $\mathbf{u}'(\mathbf{x}) \pm i\mathbf{v}'(\mathbf{x}) = A(\mathbf{u(x)} \pm i\mathbf{v(x)})$, тогда $\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = A\mathbf{u(x)}$; $\mathbf{v}'(\mathbf{x}) = A\mathbf{v(x)}$. Что и требовалось доказать.

б) Пусть среди корней характеристического уравнения (6.4) первые m пар комплексно-сопряженны, а остальные вещественны:

$$\kappa_{2\nu-1,2\nu} = \lambda_\nu \pm i\mu_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, m), \quad \kappa_{2m+1} = \lambda_{2m+1} = \ldots = \kappa_n = \lambda_n \quad (6.6)$$

Возмём $\lambda_\nu \pm i\mu_\nu$. Найдём соответствующие векторы

$$\mathbf{S_{2\nu-1,2\nu}} = \mathbf{S}_\nu^{(\mathbf{1})} \pm \mathbf{S}_\nu^{(\mathbf{2})},$$

тогда получим пару комплексно сопряжённых решений

$$(\mathbf{S}_\nu^{(\mathbf{1})} \pm \mathbf{S}_\nu^{(\mathbf{2})})e^{(\lambda_\nu \pm i\mu_\nu)x} = (\mathbf{S}_\nu^{(\mathbf{1})} \pm \mathbf{S}_\nu^{(\mathbf{2})})(\cos\mu_\nu x \pm i\sin\mu_\nu x),$$

откуда по замечанию видим, что рассматриваемой паре будут отвечать два вещественных решения: $(\mathbf{S}_\nu^{(\mathbf{1})} + \mathbf{S}_\nu^{(\mathbf{2})})\ e^{\lambda_\nu x}$, и $(\mathbf{S}_\nu^{(\mathbf{1})} - \mathbf{S}_\nu^{(\mathbf{2})})\ e^{\lambda_\nu x.}$

Пример:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = -y_1 \end{cases}$$

Ищем решения в виде: $y_1 = s_1 e^{kx}$, $y_2 = s_2 e^{kx}$. $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$

$$(A - kE)\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = 0$$

характеристический многочлен имеет вид: $\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = k^2 + 1 = 0$;

$k_{1,2} = \pm i$; $\begin{pmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = 0$, откуда $-is_1 + s_2 = 0$. Пусть $s_1 = 1$, $s_2 = i$. Получаем два решения: $\tilde{y}_1 = e^{ix}$, $\tilde{y}_2 = ie^{ix}$ или

$$\tilde{y}_1 = \cos x + i \sin x, \tilde{y}_2 = -\sin x + i \cos x,$$

откуда получаем $y_{11} = \cos x; y_{12} = \sin x; y_{21} = -\sin x; y_{22} = \cos x$.

Фундаментальная матрица имеет вид

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix},$$

откуда решение имеет вид:

$$\begin{array}{rl} y_1 = & C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ y_2 = & -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{array}$$

Для нахождения фундаментальной матрицы однородной системы с постоянными коэффициентами в общем случае напомним некоторые сведения из теории функций от матриц.

§7. Некоторые сведения из теории функций от матриц.

1. Рассмотрим квадратную матрицу

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Элементы которой - вещественные числа. Под нормой U будем понимать $\|\mathbf{U}\| = max\,\{|u_{kl}|\} \quad k, l = 1 \dots n$

Известны следующие свойства нормы:

1. $\|\mathbf{U} + \mathbf{V}\| \leq \|\mathbf{U}\| + \|\mathbf{V}\|$
2. $\|\mathbf{UV}\| \leq n\|\mathbf{U}\| \cdot \|\mathbf{V}\|$
3. $\|\alpha\mathbf{U}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{U}\|$

4. $\|\mathbf{U^m}\| \leq n^{m-1}\|\mathbf{U}\|^m \leq n^m\|\mathbf{U}\|^m = (n\|\mathbf{U}\|)^m$ (7.1)

где α - вещественное число, $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ - матрицы.

Пусть мы имеем бесконечную последоватеьность матриц

$$\mathbf{U_m} = \left\{u_{kl}^{(m)}\right\} \quad m = 1,\, 2,\, \ldots \tag{7.2}$$

Определение 1: Матрица $\mathbf{U} = \{u_{kl}\} \quad (k, l = 1 \ldots n)$ называется пределом последовательности (7.2), если

$$\|\mathbf{U_m} - \mathbf{U}\| \; m \overrightarrow{\rightarrow} \infty \; 0 \tag{7.3}$$

(7.3) можно записать:

$$\underbrace{max}_{k,l=1\ldots n} \left\{\left|u_{kl}^{(m)} - u_{kl}\right\}\right| \; m \overrightarrow{\rightarrow} \infty \; 0 \tag{7.3$'$}$$

Тогда

$$\overset{\left|u_{kl}^{(m)} - u_{kl}\right| \to 0}{m \to \infty} \qquad k, l = 1 \ldots n \tag{7.4}$$

Обратно, если существует (7.4), то следовательно имеет место (7.3) или (7.3'). Отсюда видим, что существование предела последоваельности матриц (7.2) эквивалентно существованию пределов последовательностей элементов матриц $u_{kl}^{(m)} \quad (k, l = 1 \ldots n)$. К последовательности (7.2) применим принцип сходимости Больцано-Коши: для того, чтобы последовательность (7.2) имела предел, необходимо и достаочно, чтобы для любого сколь угодно малого > 0 существовал номер $N()$ такой, что для любых двух номеров p и q, больших $N() \quad (p > q)$ выполняется $||U_q - U_p|| < .$

2. Пусть $f(z)$ - гомоморфная в круге $|z| < R$ функция переменной z, т. е. имеет место сходящееся при $|z| < R$ разложение

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots \tag{7.5}$$

Будем далее предполагать, что R представляет собой именно радиус сходимости ряда (7.5).

Заменяя формально в правой части z на квадратную матрицу $\mathbf{Z}$ порядкаn, получим матричный ряд, который обозначим через $f(\mathbf{Z})$:

$$f(\mathbf{Z}) = \alpha_0 I_n + \alpha_1 \mathbf{Z} + \alpha_2 \mathbf{Z}^2 + \ldots \tag{7.6}$$

Определение 2: Будем говорить, что ряд (7.6) сходится, если сходятся все n^2 соответствующих скалярных рядов (7.5) для элементов$f(\mathbf{Z})$.

В силу этого для (7.6) справедлив критерий Больцано-Коши: для того, чтобы ряд (7.6) сходился, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall > 0 \, \exists \, N()$ такой, что для $\forall p, q > N() \quad (q > p)$ выполнялось неравенство $\left\| \sum\limits_{m=q-p} \alpha_m \mathbf{Z}_m \right\| <.$

__**Лемма 1.**__ **(о радиусе сходимости матричных рядов)** Если радиус сходимости ряда (7.5) есть $\rho > 0$, то ряд (7.6) сходится для любой квадраной матрицы $\mathbf{Z}$, для которой

$$\|\mathbf{Z}\| < \frac{\rho}{n} \tag{7.7}$$

Каждый элемент общего члена ряда (7.6) матрицы $\alpha_n \mathbf{Z}^n$ не превосходит по абсолютной величине член $|\alpha_n \mathbf{Z}^n| \leq |\alpha_n| \cdot |\mathbf{Z}|^n$. Таким образом, все скалярных рядов (7.6) мажорируются рядом

$$|\alpha_0| \cdot |E| + |\alpha_1| \cdot |\mathbf{Z}| + |\alpha_2| \cdot |\mathbf{Z}|^2 + \ldots,$$

который сходится при $|\mathbf{Z}| < R$.

Из изложенного следует, что ряды

- $e^{\mathbf{Z}} = E + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{\mathbf{Z}^m}{m!}$
- $\cos \mathbf{Z} = E + \sum\limits_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\mathbf{Z}^{2m}}{(2m)!}$
- $\sin \mathbf{Z} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{\mathbf{Z}^{2m-1}}{(2m-1)!}$

сходятся для любых квадратных матриц $\mathbf{Z}$.

__Доказательство.__ Известно, что степенной ряд внутри круга сходимости сходится абсолютно. Возьмём $0 < r < \rho$, тогда при $z = r$ ряд (7.5) сходится абсолютно, а тогда по признаку сходимости Коши для $\forall > 0 \, \exists \, N_{>}0$ такое, что $\forall p, q > N \quad _{(q>p)}$ выполнено неравенство

$$\sum_{m=p+1}^{q} |\alpha_m| r^m < \tag{7.8}$$

Возьмём любую квадратную матрицу $\mathbf{Z}$, для которой имеем (7.7). Тогда $n\|\mathbf{Z}\| < \rho$. для такого r будет выполнено (7.8). По принципу сходимости

$$\left\| \sum_{m=p+1}^{q} |\alpha_m| \right\| \leq \sum_{m=p+1}^{q} |\alpha_m| \cdot \|\mathbf{Z}^m\| \leq \sum_{m=p+1}^{m} |\alpha_m| (n\|\mathbf{Z}\|^m) < .$$

Отсюда замечаем, что ряд (7.6) сходится.

Для доказательства леммы 2 о радиусе сходимости матричных рядов рассмотрим свойства функций от матриц.

1) Если матрица $\mathbf{B} = \mathbf{SAS^{-1}}$, и если $f(\mathbf{A})$ существует, т.е. сходится соответствующий матричный ряд, то $f(\mathbf{B})$ существует и равно $\mathbf{S}f(\mathbf{A})\mathbf{S^{-1}}$, т.е. $f(\mathbf{SAS^{-1}}) = \mathbf{S}f(\mathbf{A})\mathbf{S^{-1}}$.

Имеем последовательно

$\mathbf{B^2} = \mathbf{SAS^{-1}} \cdot \mathbf{SAS^{-1}} = \mathbf{SA^2S^{-1}}$ $\quad (S^{-1}S = E$- единичная матрица $n \times n)$

$\mathbf{B^3} = \mathbf{B^2} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{SA^2S^{-1}SAS^{-1}} = \mathbf{SA^3S^{-1}}$ $\quad$ *и т.д.* ...

Предположим, что верно: $\mathbf{B^m} = \mathbf{SA^mS^{-1}}$, докажем, что подобное представление верно для $\mathbf{B^{m+1}}$. Действительно

$$\mathbf{B^{m+1}} = \mathbf{B^m} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{SA^mS^{-1}SAS^{-1}} = \mathbf{SA^{m+1}S^{-1}}.$$

По методу математической индукции тогда наше рассуждение верно для любого целого m.

Подставляя найденные представления для различных степеней матрицы $\mathbf{B}$ в (7.6), получим:

$$f(\mathbf{B}) = \mathbf{S}(\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \ldots)\mathbf{S^{-1}} = \mathbf{S}f(\mathbf{A})\mathbf{S^{-1}}.$$

2) Если $\mathbf{B}$ является прямой суммой матриц $\mathbf{A_1}, \ldots, \mathbf{A_k}$; $\mathbf{B} = \mathbf{A_1} + \ldots + \mathbf{A_k}$ (сумма порядковых номеров равна матриц $\mathbf{A_1}, \ldots \mathbf{A_k}$ равна n) и функции $f(\mathbf{A_1}), \ldots, f(\mathbf{A_k})$ существуют, то $f(\mathbf{B})$ существует и равна прямой сумме матриц $f(\mathbf{A_i}) \quad (i = 1 \ldots k)$:

$$f(\mathbf{B}) = f(\mathbf{A_1}) \dot{+} \ldots \dot{+} f(\mathbf{A_n}) \tag{7.8}$$

Доказательство. Используя правило умножения матриц, найдём, что из $\mathbf{B} = \mathbf{A_1} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathbf{A_k}$ следует $\mathbf{B^2} = \mathbf{A_1^2} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathbf{A_k^2}, \ldots, \mathbf{B^m} = \mathbf{A_1^m} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathbf{A_k^m}$ (пять легко убедиться методом математической индукции, что указанные представления верны для любой целой степени m). После подстановки полученных сумм степеней матрицы $\mathbf{B}$ в уравнение (7.6) будем иметь

$$f(\mathbf{B}) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m (\mathbf{A_1^m} + \ldots + \mathbf{A_k^m}) = f(\mathbf{A_1}) + \ldots + f(\mathbf{A_k})$$

3) Если $\mathbf{Q}$ - жорданов ящик порядка $k \times k$, т.е.

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix},$$

то $f(\mathbf{Q})$ определяется формулой

$$f(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{f^{k-1}(\lambda)}{(k-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \dots & \frac{f^{k-2}(\lambda)}{(k-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda) \end{pmatrix} \tag{7.9}$$

Докажем формулу (7.9). Для орпеделённости возьмём матрицу четвртого порядка. Имеем

$$\mathbf{Q^2} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, \mathbf{Q^3} = \mathbf{Q^2} \cdot \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q^m} = \mathbf{Q^{m-1}} \cdot \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \lambda^m & m\lambda^{m-1} & \frac{m(m-1)}{2}\lambda^{m-2} & \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\lambda^{m-3} \\ 0 & \lambda^m & m\lambda^{m-1} & \frac{m(m-1)}{2}\lambda^{m-2} \\ 0 & 0 & \lambda^m & m\lambda^{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^m \end{pmatrix}$$

В справедливости последней формулы можно убедиться индукцией по m. Подставив степени матрицы $\mathbf{Q}$ в формулу (7.6) получим для $f(\mathbf{Q})$ матрицу, на главной диагонали которой будут стоять $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \alpha_m \lambda^m = f(\lambda)$, в первом косом ряду выше главной диагонали – $\sum\limits_{m=0}^{\infty} m\alpha_m \lambda^{m-1} = f'(\lambda)$, во втором косом ряду – $\sum\limits_{m=2}^{\infty} \frac{m(m-1)}{2!} \alpha_m \lambda^{m-2} = \frac{1}{2!} f''(\lambda)$, и наконец правый верхний элемент матрицы будет $\sum\limits_{m=3}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \alpha_m \lambda^{m-3} = \frac{1}{3!} f'''(\lambda)$.

Таким образом, будем иметь для матриц 4-го порядка:

$$f(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2!}f''(\lambda) & \frac{1}{3!}f'''(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2!}f''(\lambda) \\ 0 & 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

Из свойств 1), 2) и 3) вытекает, что вычисление $f(\mathbf{Z})$ сводится к вычислению функций от матриц - жордановых ящиков канонической формы $\mathbf{Z}$. Действительно, если имеем

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}(\mathbf{Q_1} + \ldots + \mathbf{Q_s})\mathbf{S^{-1}}, \tag{7.10}$$

то будем иметь

$$f(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}[f(\mathbf{Q_1}) + \ldots + f(\mathbf{Q_s})]\mathbf{S^{-1}}, \tag{7.11}$$

где каждые $f(\mathbf{Q}_\sigma) \quad (\sigma = 1 \ldots s)$ имеют вид (7.9). Докажем теперь следующее утверждение о радиусе сходимости ряда (7.6).

<u>**Лемма 2.**</u> Матричный ряд (7.6) сходится, если все собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы $\mathbf{Z}$ лежат внутри круга сходимости ряда (7.5), т.е. если $|\lambda_\nu| < R \quad (\nu = 1, \ldots, n)$ и расходится, если $|\lambda_\nu| > R$ хотя бы для одного ν.

<u>Доказательство.</u> Обозначим через $f_k(\mathbf{Z})$ частичную сумму ряда (7.6): $f_k(\mathbf{Z}) = \sum\limits_{\sigma=0}^{k} \alpha_\sigma \mathbf{Z}^\sigma$ и подставив (7.10) и используя доказанные выше свойства функций от матриц, запишем в виде

$$f(\mathbf{Z}) = S\left[\sum_{\eta=0}^{k} \alpha_\eta \mathbf{Q_1^\eta} \dot{+} \ldots \dot{+} \sum_{\eta=0}^{k} \alpha_\eta \mathbf{Q_s^\eta}\right]\mathbf{S^{-1}} \tag{7.12}$$

Матрицы $\sum\limits_{\eta=0}^{k} \alpha_\eta \mathbf{Q}_\sigma(\eta) \quad (\sigma = 1, \ldots, s)$ имеют следующий вид. На главной диагонали расположены $f_k(\lambda_\sigma)$ - частичные суммы ряда (7.5), в первом косом ряду – $f'_k(\lambda_\sigma)$, во втором косом ряду – $\frac{f''_k(\lambda_\sigma)}{2}$ и т.д., все элементы ниже главной диагонали равны нулю. Таким образом, все ряды, полученные из частичных сумм внутри квадратных скобок в (7.12), сходятся если $|\lambda_\sigma| < R \quad (\sigma = 1, \ldots, s)$. Если хотя бы одно из λ_σ лежит вне круга сходимости, то соответствующий ряд расходится, а, следовательно, и расходится матричный ряд (7.6)

§8. Построение фундаментальной матрицы сисемы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами в общем случае.

Рассмотрим систему

$$\frac{dy}{dx} = Ay \tag{6.1}$$

Докажем, что фундаментальная матрица системы имеет вид:

$$\Phi(x) = e^{Ax} \tag{8.1}$$

По определению

$$e^{Ax} = E + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A^m x^m}{m!},$$

проверим, что она-решение (6.1):

$$\frac{de^{Ax}}{dx} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A^m x^{m-1}}{m-1!} = A\left[E + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{A^{m-1} x^{m-1}}{m-1!}\right] = Ae^{Ax}.$$

Проверим второе условие определения фундаментальной матрицы:

$$\left(Det(e^{Ax})t)\big|_{x=0}\right) = Det(E) = 1,$$

т.е. e^{Ax}-фундаментальная матрица решений. Исследуем структуру (8.1). Рассмотрим

$$Det(A - \varkappa E) = 0 \tag{8.2}$$

обозначим

$$I_\nu(\varkappa) = \begin{pmatrix} \varkappa & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \varkappa & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varkappa \end{pmatrix} - \text{клетка Жордана.}$$

Пусть каноническая структура матрицы A следующая $\left[I_{\nu_1}(\varkappa_1) + \ldots + I_{\nu_p}(\varkappa_p)\right]$, где $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p$ - корни (8.2), а $\nu_1, \ldots, \nu_p$- порядки жордановых ящиков. Т.е. $A = S\left[I_{\nu_1}(\varkappa_1) + \ldots + I_{\nu_p}(\varkappa_p)\right] S^{-1}$, тогда по свойствам фундаментальной матрицы, получим $e^{Ax} = Se^{\left[I_{\nu_1}(\varkappa_1)x + \ldots + I_{\nu_p}(\varkappa_p)x\right]}S^{-1} = S\left[e^{I_{\nu_1}(\varkappa_1)x} + \ldots + e^{I_{\nu_p}(\varkappa_p)x}\right] S^{-1}$. Рассмотрим $e^{I_\nu(\varkappa)x}$. Введём в рассмотрение матрицу

$$K_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{(1-я поддиагональ состоит из едениц, а остальные элементы равны нулю)}$$

Эта матрица обладает свойством:

$$K_\nu^m = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{для } 1 \leq m < \nu - 1,$$

$\downarrow$

m-я поддиагональ

$K_\nu^m = 0 \qquad$ при $m \geqslant v$.

Обозначим $H_\nu(x) = e^{K_\nu(x)} = E + K_\nu(x) + \frac{K_\nu^2}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{(\nu-1)!}K_\nu^{\nu-1}x^{\nu-1}$ и с учётом предыдущих формул для K_ν^m имеем:

$$H_\nu(x) = e^{I_\nu(x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!} & \frac{x^{v-2}}{(v-2)!} & \dots & x & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда $I_\nu(\varkappa) = \varkappa E\nu + K_\nu$;
$e^{I_\nu(\varkappa)x} = e^{\varkappa E_\nu + K_\nu x} = e^{E_\nu \varkappa x} e^{K_\nu x} = H_\nu(x) E_\nu e^{\varkappa x} = H_\nu(x) e^{\varkappa x}$. Значит

$$e^{Ax} = S\left(H_{\nu_1}(x)e^{\varkappa_1 x} + \ldots + H_{\nu_p}(x)e^{\varkappa_p x}\right)S^{-1} \tag{8.3}$$

Известно, если Φ(x)- фундаментальная матрица системы (6.1), то $\psi(x) = (x) \cdot C$- тоже фундаментальная матрица (С-неособенная постоянная матрица). Полагая C=S, получим, умножая на S справа,

$$\psi(x) = S\left[H_{\nu_1}(x)e^{\varkappa_1 x} + \ldots + H_{\nu_p}(x)e^{\varkappa_p x}\right]$$

§9. Теорема существования и теорема о функциональных свойствах решений нормальных систем дифференциальных уравнений первого порядка.

Рассмотрим нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad i = 1, \ldots, n \tag{9.1}$$

В этой системе t независимые переменные x_1,...,x_n – неависмые функции этого переменного, а f_1,f_2,...,f_n- функции от n+1 переменных, заданные на некотором множестве Г размерности n+1 , в котором координатами точки являются числа t,x_1,...,x_n. В дальнейшем всегда будем предпологать, что функция

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad i = 1, \ldots, n \tag{9.2}$$

непрерывна на открытом множестве Г, точно так же будет предполагаться, что их частные производные

$$\frac{df_i(t, x_1, \ldots, x_n)}{dx_j} \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{9.3}$$

существуют и непрерывны на множестве Г. Следует заметить, что частные производные (9.3), непрерывность которых предполагается, берутся только по переменным x_1,...,x_n, а не по независимому переменному t.

Решением системы уравнений (9.1) называется система непрерывных функций

$$x_i = \varphi_i(t) \quad i = 1, \ldots, n, \tag{9.4}$$

определённых на некотором интервале r_1<t<r_2 и удовлетворяющих системе (9.1). Интервал r_1<t<r_2 называется интервалом определения решения (9.4)(слуай $r_1 = -\infty$, $r_2 = +\infty$ не предпологается). Считается что система функций (9.4) удовлетворяет системе уравнений (9.1), если при подстановке в (9.4) вместо x_1,...,x_n функций (9.4)соотношение (1)превращается в тождества по t на всём интервале r_1<t<r_2.Для возможности этой подстановкинеобходимо, чтобы функции (9.4) имели производные в каждой точке интервала r_1<t<r_2 и тогда правые части уравнений (9.1) были определены для всех подставляемых в них значений аргументов. Таким образом, точка с координатами t,$\varphi_1(t)$,...,$\varphi_n(t)$ должна принадлежать множеству Г для всех значений t на интервале r_1<t<r_2.

Дадим теперь формулировку теореме существования и единственности для нормальной системы (9.1)

Теорема 1. Пусть (9.1)- нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь правые части уравнений (9.1) определены на некотором открытом множестве Г, а функции (9.2) и (9.3) непрерывны на этом множестве. Оказывается, что для каждого типа

$$t_0, {x_1}^0, {x_2}^0, \ldots, {x_n}^0 \tag{9.5}$$

множества Г существует решение

$$x_i = \phi_i(t) \quad i = 1, \ldots, n \tag{9.6}$$

системы (9.1), определённое на некотором интервале, содержащем точку t_0 и удовлетворяющее условиям:

$$\phi_i(t_0) = {x_i}^{(0)} \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9.7}$$

Далее, оказывается, что если имеются два каких-либо решения

$$\left.\begin{array}{ll} x_i = \varphi_i(t) & i = 1, \ldots, n \\ x_i = \chi_i(t) & i = 1, \ldots, n \end{array}\right\} \tag{9.8}$$

системы (9.1) удовлетворяющие условиям

$$\varphi_i(t_0) = \chi_i(t_0) = {x_i}^{(0)} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{9.9}$$

причём каждое решение определяет на своём собственном интервале значений переменной t, содержащим точку t_0, то эти решения совпадают всюду, где они оба определены. Значения (9.5) называются начальными для решения (9.6), а соотношения (9.7) называются начальными условиями для этого решения. Мы будем говорить в дальнейшем, что решение (9.6) имеет начальные значения (9.5) или удовлетворяет начальным условиям (9.7). Таким образом, теорему существования и единственности для нормальной системы кратко можно сформулировать так. Каковы бы ни были начальные значения (9.5), всегда существует решение систем (9.1) с этими начальными значениями, определённое на некотором интервале, содержащем точку t_0. Далее, если имеются два решения с одинаковыми начальными значениями (9.5), каждое из которых определено на своём интервале, содержащем t_0, то эти решения совпадают на общей часте этих интервалов.Полагая $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$,

$$\mathbf{f_1}(t, n) = (f_1(t, \mathbf{x}), \ldots, f_n(t, \mathbf{x})) \tag{9.10}$$

перепишем систему (9.1) в векторной форме

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \tag{9.11}$$

<u>Доказательство</u> теоремы будет проводиться в векторной форме методом последовательных приближений

1)Вспомогательные предложения

Для того чтобы пользоваться векторным обозначением, установим некоторые определения и простые неравенства для векторов и векторных функций. Длина или модуль $\mid \mathbf{x} \mid$ вектора (9.10), как известно, определяется формулой

$$\mathbf{x} = +\sqrt{{x_1}^2 + \ldots + {x_n}^2}.$$

Известно, и без труда доказывается, что если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ суть два вектора, то имеет место равенство:

$$| \mathbf{x}+\mathbf{y} | \leq | \mathbf{x} | + | \mathbf{y} |.$$

Из этого неравенства следует аналогичное неравенство и для произвольного числа векторов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_l$, имеем:

$$| \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_l | \leq | \mathbf{x}_1 | + \ldots + | \mathbf{x}_l | . \tag{9.12}$$

Пусть

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) -$$

непрерывная векторная функция действительного переменного t, т.е. вектор, координаты которого являются непрерывными функциями переменного t. Если функция $\varphi(t)$ определена на интервале $\tau_1 < t < \tau_2$ то при $\tau_1 < t_0 < \tau_2$ на том же интервале можно определить векторную функцию

$$\psi(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau,$$

задав компоненты $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ вектора $\psi(t)$ формулами

$$\psi_i(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \varphi_i(\tau)\, d\tau;$$

при этом имеет место неравенство

$$\left| \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau \right| \leq \left| \int\limits_{t_0}^{t} |\varphi(\tau)|\, d\tau \right|.$$

Установим неравенство для векторной функции

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_n(x_1 \dots, x_n))$$

векторного переменного $\mathbf{x}$, заданной на выпуклом множестве Δ пространства переменных $x_1, \dots, x_n$. Предположим, что имеет место неравенство:

$$| \frac{\partial g_i(x_1 ... x_n)}{\partial x_j} | \leq k,$$

где k – положительное число. Оказывается тогда, что для двух любых точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ множества Δ выполняется неравенство

$$\mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}) \mid \leq n^2 K \mid \mathbf{x} - \mathbf{y} \mid \tag{9.13}$$

Для доказательства неравенства (9.13) введём в рассмотрение отрезок, соединяющий точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, имеем: $\mathbf{z}(s) = \mathbf{y} + s(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. Когда s пробегает значения $0 \leq s \leq 1$, точка z(s)пробегает отрезок, соединяющий точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, и, ввиду выпуклости множества Δ, всё время остаётся в нём. Мы получаем (применяя формулу Лагранжа):

$$g_i(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{y}) = g_i(\mathbf{z}(1)) - g_i(\mathbf{z}(0)) = \frac{dg_i(\mathbf{z}(s))}{ds}$$

Вычисляя производную $\frac{dg_i(\mathbf{z}(s))}{ds}$ по формуле производной от сложной функции, получаем:

$$\frac{dg_i(z(s))}{ds} = \frac{dg_i((z_1(s)), ..., (z_n(s)))}{ds} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i(z_1()), ..., (z_n(s)))(dz^k(s))}{(\partial x^k)(ds)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i((z_1(s)), ..., (z_n(s)))(x^k - y^k)}{\partial x^k}.$$

Таким образом,

$$\mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}) \mid \leq \sum_{k=1}^{n} K \mid x_k - y_k \mid \leq \sum_{k=1}^{n} \mid \mathbf{x} - \mathbf{y} \mid \leq nK \mid \mathbf{x} - \mathbf{y} \mid,$$

Возводя последнее неравенство в квадрат, суммируя его по i, и извлекая корень, получаем:

$$\mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}) \mid \leq n^{3/2} K \mid \mathbf{x} - \mathbf{y} \mid \leq n^2 K \mid \mathbf{x} - \mathbf{y} \mid,$$

2)От дифференциального уравнения (9.11) перейдём к интегральному.

А). Пусть $\mathbf{x} = \varphi(t)$-некоторое решение дифференциального уравнения (9.11), так что выполнено тождество

$$\varphi(t) = \mathbf{f}(t, \varphi(t)) \tag{9.14}$$

и пусть

$$\varphi(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{9.15}$$

- начальные условия, которым это решение удовлетворяет. Оказывается, что совокупность соотношений (9.14) и (9.15) эквивалентна одному соотношению

$$\varphi(t) = \mathbf{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{f}(\tau, \varphi(\tau))d\tau \qquad (9.16)$$

Докажем это: допустим, что выполнено интегрируемое тождество (9.16). Подставляя в него $t = t_0$, получаем равенство (9.15), а дифференцируя его по t, получаем тождество (9.14). Допустим теперь, что выполнены соотношения (9.14) и (9.15). Интегрируя соотношение (9.14) в пределах от t_0 до t и принимая во внимание соотношение (9.15), мы получим соотношение (9.16).

Б). Пользуясь правой частью тождества (9.16), каждый вектор функции $\varphi(t)$, график которой проходит в множестве Г, поставим в соответствие функцию $\varphi^*(t)$, полагая

$$\varphi^*(t) = \mathbf{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{f}(\tau, \varphi(\tau))d\tau \tag{9.17}$$

Кратко, в операторной форме то же соотношение запишим в виде

$$\varphi^* = A\varphi. \tag{9.18}$$

Уравнение (9.16) теперь можем переписать в виде:

$$\varphi = A\varphi. \tag{9.19}$$

В). Пусть $\varphi(t)$ – непрерывная векторная функция, заданная на отрезке $\tau_1 \leq t_0 \leq \tau_2$. Определим норму $\| \varphi \|$ Этой функции, положив

$$\| \varphi \| = max \mid \varphi(t) \mid .$$

Пользуясь понятием нормы, можно формулировать определение равномерной сходимости последовательности

$$\varphi_{\mathbf{0}}, \varphi_{\mathbf{1}}, \varphi_{\mathbf{2}}, \ldots, \varphi_{\mathbf{i}}, \ldots . \tag{9.20}$$

непрерывных векторных функций, заданных на отрезке $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$. Последовательность (9.20) векторных функций равномерно сходится к непрерывной функции φ, заданных на том же отрезке $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$, если

$$\lim_{i\to\infty} \| \varphi - \varphi_i \| = 0.$$

Для того, чтобы последовательность (9.20) равномерно сходилась, достаточно, чтобы были выполнены неравенства.

$$|| \varphi_{\mathbf{i+1}} - \varphi_{\mathbf{i}} \, || \leq a_i,$$

где числа $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$ образуют степенной ряд. Перейдём теперь к доказательству теоремы. Так как точка $(t_0, \mathbf{x_0}) = (t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ принадлежит открытому множеству Г, то существуют такие положительные числа q и a, чтобы точки (t,$\mathbf{x}$), удовлетворяющие условиям

$$|\ t - t_0\ | \leq q, \quad |\ \mathbf{x} - \mathbf{x_0}\ | \leq a, \tag{9.21}$$

лежат в множестве Г. Так как множество П, состоящее из всех точек (t,$\mathbf{x}$), удовлетворяющим условиям (9.21), замкнуто и ограничено, то непрерывные функции $|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})|$ и $\frac{|\partial f_i(t,\mathbf{x})|}{\partial x_j}$ $\quad (i, j = 1, \ldots, n)$ ограничены на нём, т. е. существуют такие положительные числа M и K, что $|\ \mathbf{f}(t, \mathbf{x})\ | \leq M$ и

$$\frac{|\ \partial f_i(t, \mathbf{x})\ |}{\partial x_j} \leq K \quad i, j = 1, \ldots, \text{n на множестве П.} \tag{9.22}$$

Наряду с множеством П рассмотрим содержащееся в нём множество Π_2, определяемое неравенствами

$$|\ t - t_0\ | \leq r, |\ \mathbf{x} - \mathbf{x_0}\ | \leq a, \text{где } r \leq q. \tag{9.23}$$

Обозначим через Ω_r семейство всех непрерывных векторных функций, заданных на отрезке $|t - t_0| \leq r$, графики которых проходят в Π_r. Таким образом функция φ, определяется на отрезке $|t - t_0| \leq r$, тогда и только тогда, когда принадлежит семейству Ω_r, когда для любого t, принадлежащего этому отрезку, выполняется неравенство

$$|\varphi - \mathbf{x_0}| \leq a \tag{9.24}$$

Постораемся выбрать теперь число r таким образом, чтобы были выполнены следующие два условия:

а) Если функция φ принадлежит семейству Ω_r, то функция $\varphi^* = A\varphi$ так же принадлежит семейству Ω_r.

б) Существует такое число k, 0<k<1, что для любых двух функций ψ и χ семейства Ω_r имеет место неравенство

$$\|A\psi - A\chi\| \leq k\, \|\psi - \chi\| \tag{9.25}$$

Рассмотрим условие а). Для того, чтобы функция $\varphi^* = A\varphi$ принадлежала семейству Ω_r необходимо и достаточно, чтобы при $|t - t_0| \leq r$ было выполнено неравенство:

$$|\varphi^*(\mathbf{t}) - \chi_{\mathbf{0}}| \leq a.$$

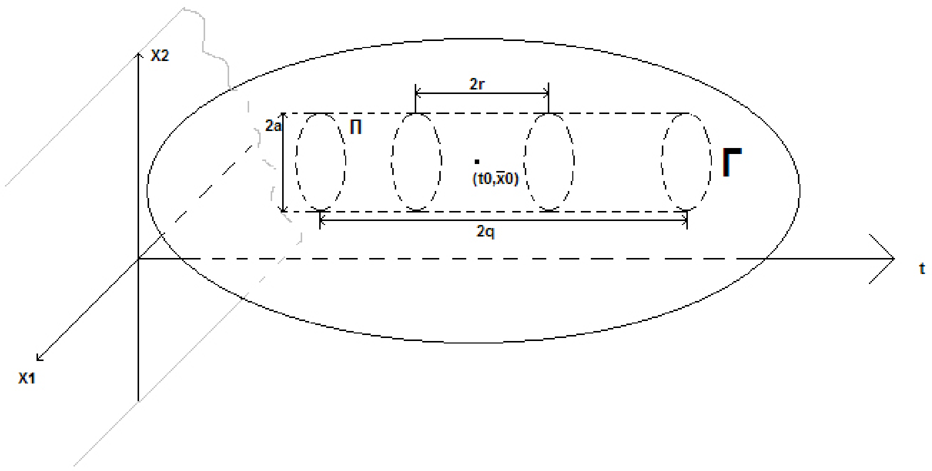

Рис. 1:

В силу (9.17) и (9.22)имеем:

$$|\varphi^*(\mathbf{t}) - \chi_{\mathbf{0}}| = |\mathbf{f}(\tau, \varphi(\tau))d\tau| \le \left| \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{f}(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau \right| \le M_r \tag{9.26}$$

Из этого видно, что при $r \le \frac{a}{M}$ условие а) выполнено. Рассмотрим теперь условие б). Мы имеем:

$$|\psi^*(\mathbf{t}) - \chi^*(\mathbf{t})| = \left| \int\limits_{t_0}^{t} (\mathbf{f}(\tau, \varphi(\tau)) - \mathbf{f}(\tau, \chi(\tau)))\, d\tau \right| \le \left| \int\limits_{t_0}^{t} |\mathbf{f}(\tau, \psi(\tau)) - \mathbf{f}(\tau, \chi(\tau))|\, d\tau \right| \tag{9.27}$$

Оценим теперь последнее подынтегральное выражение, пользуясь неравенствами (9.13) и (9.22):

$$|\mathbf{f}(\tau, \psi(\tau)) - \mathbf{f}(\tau, \chi(\tau))| \le n^2 K\, |\phi(\tau) - \chi(\tau)| \tag{9.28}$$

Из (9.27) и (9.28) следует

$$\|A\phi - A\chi\| = \|\phi^* - \chi^*\| \le n^2 K_r\, \|\phi - \chi\|$$

аким образом, условие б) выполнено, если

$$r \le k/(n^2 K), \tag{9.29}$$

где k<1. Итак, если число r удовлетворяет неравенствам (9.23),(9.26),(9.29) (которые мы в дальнейшем будем считать выполнеными), то для семейства Ω_r выполнены условия a) и б). Построим теперь последовательность векторных функций

$$\varphi_{\mathbf{0}}(t) \equiv \mathbf{x_0}, \varphi_{\mathbf{1}}(t), \ldots, \varphi_{\mathbf{i}}(t) \ldots \qquad (9.30)$$

определённых на отрезке $|t - t_0| \leq r$, положив

$$\varphi_{\mathbf{i+1}} = A\varphi_{\mathbf{i}}, i = 0, 1, \ldots \qquad (9.31)$$

Так как функция $\varphi_{\mathbf{0}}$ принадлежит семейству Ω_r, то и все функции последовательности (9.30) принадлежат этому же семейству (смотрите условие a)). Далее имеем (смотрите (9.24))

$$\|\varphi_{\mathbf{1}} - \varphi_{\mathbf{0}}\| = max\,|\varphi_{\mathbf{1}}(t) - \mathbf{x_0}| \leq a.$$

В силу (9.25) получаем:

$$\|\varphi_{\mathbf{i+1}} - \varphi_{\mathbf{0}}\| = \|A\varphi_{\mathbf{i}} - A\varphi_{\mathbf{i-1}}\| \leq k\,\|\varphi_{\mathbf{i}} - \varphi_{\mathbf{i-1}}\|\,,$$

откуда

$$\|\ \varphi_{\mathbf{i+1}} - \varphi_{\mathbf{i}}\ \| \leq ak^i \qquad (9.32)$$

Таким образом, в силу (9.32) последовательность (9.30) равномерно сходится к некоторой непрерывной функции φ принадлежащей семейству Ω_r. Покажем, что функция φ удовлетворяет уравнению (9.19). Для этого заметим, что последовательность $A\varphi_{\mathbf{0}}, A\varphi_{\mathbf{1}}, \ldots, A\varphi_{\mathbf{i}}, \ldots$ равномерно сходится к функции $A\varphi$; действительно, мы имеем (смотреть (9.25)):

$$|A\varphi - \varphi_{\mathbf{i}}\| \leq k\,\|\varphi - \varphi_i\|$$

Переходя в соотношении (9.31) к пределу при $i \to \infty$, получаем:

$$\varphi = A\varphi$$

Итак, существование решения $\mathbf{x} = \varphi(t)$ уравнения (9.11), удовлетворяющего начальному условию (9.15), доказано и установлено, что решение $\mathbf{x} = \varphi(t)$ определено на интервале $|\ t - t_0\ | \leq r$, где r- произвольное число, удовлетворяющее неравенствам (9.23),(9.26),(9.29). Перейдём теперь к доказательству единственности. Пусть $\mathbf{x} = \psi(t)$ и $\mathbf{x} = \chi(t)$ - два решения уравнения (3) с общими начальными значениями t_0, $\mathbf{x}_0$ и $r_1 < t < r_2$ - интервал, являющийся пересечением интервалов существования решения ψ и χ, очевидно, что $r_1 < t_0 < r_2$. Покажем, что если решения $\psi(t)$

и $\chi(t)$ совпадают в некоторой точке t_1 интервала $r_1 < t < r_2$, то они совпадают и на некотором интервале $\mid t - t_1 \mid< r$, где r – достаточно малое положительное число. Положим

$$\mathbf{x_1} = \psi(t_1)\chi(t_1),$$

тогда величины t_1,x_1 могут быть приняты за начальные значения обоих решений $\mathbf{x} = \psi(t)$ и $\mathbf{x} = \chi(t)$. В этом смысле точка $(t_1, \mathbf{x_1})$ ничем не отличается от точки $(t_0, \mathbf{x_0})$ и поэтому мы сохраним за точкой $(t_1, \mathbf{x_1})$ обозначение $(t_0, \mathbf{x_0})$; это позволит нам сохранить и другие прежние обозначения. Переходя от дифференциального уравнения (9.11) к интегральному уравнению (9.16), мы получаем для обеих функций $\psi(t)$ и $\chi(t)$ интегральные равенства, которые в операторной форме могут быть записаны в виде:

$$\psi = A\psi \qquad \chi = A\chi \tag{9.33}$$

Выберем теперь, как и прежде, в множестве Γ множество Π с центром в точке $(t_0, \mathbf{x_0})$ (смотрите неравенства (9.21)), содержащееся в Γ, а затем множество Π_r таким образом, чтобы число r, кроме неравенств (9.23),(9.26),(9.29), удовлетворяло ещё тому условию, что при $\mid t - t_0 \mid\leq r$ функции ψ и χ определены и удовлетворяют неравенствам:

$$|\psi(t) - \mathbf{x_0}| \leq a \qquad |\chi(t) - \mathbf{x_0}| \leq a$$

Это возможно, так как функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ непрерывны. Тогда функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$, рассматриваемые на отрезке $\mid t - t_0 \mid\leq r$, входят в семейство Ω_r и , следовательно, в силу неравенств (9.25) и соотношений (9.33), получаем

$$\|\psi - \mathbf{x}\| = \|A\chi - A\chi\| \leq k\,\|\psi - \chi\|\,,$$

а это возможно только тодга, когда $\|\psi - \chi\| = 0$, т.е. функции ψ и χ совпадают на отрезке $\mid t - t_0 \mid\leq r$. Докажем теперь, что функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ совпадают на всём интервале $r_1 < t < r_2$. Допустим противоположное, именно, что существует точка t^* интервала $r_1 < t < r_2$ для которой $\psi(t^*) \neq \chi(t^*)$. Ясно, что $t^* \neq t_0$. Для определённости будем считать, что $t^* > t_0$. Обозначим через N множество всех точек t отрезка $t_0 \leq t \leq t^*$, для которых $\psi(t) = \chi(t)$ и докажем, что множество N замкнуто. В самом деле, пусть $\tau_1, \tau_2, \dots$ – последовательность точек множества N, сходящаяся к точке τ. Тогда $\psi(\tau_i) = \chi(\tau_i)$ и потому, в силу непрерывности функций ψ и χ, $\psi(\tau) = \lim_{i\to\infty}\psi(\tau_i) = \lim_{i\to\infty}\chi(\tau_i) = \chi(\tau)$, т.е. точка τ также принадлежит множеству N. Обозначим через τ_1 точную верхнюю грань множества N. Так как N замкнуто, то t_1 принадлежит этому множеству, т.е. $\psi(t_1) = \chi(t_1)$. Следовательно, $t^* > t_1$. Но тогда, в силу ранее доказанного, функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ должны совпадать на некотором интервале $\mid t - t_1 \mid < r$, и точка t_1 не может быть точной верхней гранью множества N. Таким образом, мы пришли к противоречию.

Пусть

$$x_i = \varphi_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{9.34}$$

решение системы уравнения (9.1), определенное на интервале $r_1 < t < r_2$ и

$$x_i = \varphi_i(t) \qquad (i = 1, ..., n) - \tag{9.35}$$

решение той же системы уравнений (9.1), определенное на интервале $s_1 < t < s_2$. Мы будем говорить, что решение (9.35) является продолжением решения (9.34), если интервал $s_1 < t < s_2$ содержит интервал $r_1 < t < r_2$ (т.е. $s_1 \leq r_1$, $r_2 \leq s_2$) и решение (9.34) совпадает с решением (9.35) на интервале $r_1 < t < r_2$. В частности, мы будем считать, что решение (9.35) является продолжением решения (9.34) и в том случае, когда оба решения полностью совпадают, т.е. $s_1 = r_1$,$r_2 = s_2$. Решение (9.34) будем называть непродолжаемым, если не существует никакого отличного от него решения, являющегося его продолжением.

Ниже докажем теорему о том, что каждое решение может быть продолжено до непродолжаемого решения и притом единственным способом. В этом смысле непродолжаемые решения исчерпывают совокупность всех решений.

Теорема (о непродолжаемом решении) Пусть

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \tag{9.11}$$

векторная запись нормальной системы уравнений, правая часть которой определена и непрерывна вместе со своими частными производными $\frac{df_i(t,\mathbf{x})}{dx_j}$ на некотором открытом множестве Γ пространства переменных $t, x_1, ...x_n$:

1. существует непродолжаемое решение уравнения (9.11) с произвольными начальными значениями из Γ;
2. если некоторое непродолжаемое решение уравнения (9.11) совпадает с некорым другим решением уравнения (9.11) хотя бы при одном значении t, то оно является продолжением этого решения;

3. если два непродолжаемых решения уравнения (9.11) совпадают между собой хотя бы для одного значения t, то они полностью совпадают, т.е. имеют один и тот же интервал определения и равны на нем.

Доказательство.

Пусть $(t_0, \mathbf{x}_0)$ - произвольная точка из Г. Построим такое решение $\mathbf{x} = \varphi(t)$ уравнения (9.11) с начальными значениями $t_0, \mathbf{x}_0$, что оно является продолжением любого решения уравнения (9.11) с начальными значениями $t_0, \mathbf{x}_0$. Каждому решению уравнения (9.11) с начальными значениями $t_0, \mathbf{x}_0$ соответствует свой интервал определения. Множество всех правых концов этих интервалов обозначим через R_2, а множество всех их левых концов - через R_1. Точную верхнюю грань множества R_2 обозначим через m_2(в частности, может оказаться, что $m_2 = \infty$), а точную нижнюю грань множества R_1 обозначим через m_1(в частности, может оказаться, что $m_1 = \infty$). Построим решение $\mathbf{x} = \tilde{\varphi}(t)$ с начальными значениями $(t_0, \mathbf{x}_0)$, определенное на интервале $m_1 < t < m_2$. Пусть t^* - произвольная точка этого интервала. Допустим для определенности, что $t_0 \leq t^*$. Так как m_2 есть точная верхняя грань множества R_2, то существует решение $\mathbf{x} = \psi(t)$ уравнения (9.11) с начальными значениями $t_0, \mathbf{x}_0$, интервал определения которого содержит t^*, и мы положим $\psi(t^*) = \tilde{\varphi}(t^*)$. Полученное значение функции $\tilde{\varphi}$ в точке t^* не зависит от случайно выбранного решения $\mathbf{x} = \psi(t)$. Действительно, если бы вместо решения $\mathbf{x} = \psi(t)$ мы взяли решение $\mathbf{x} = \chi(t)$ с начальными значениями $t_0, \mathbf{x}_0$ и интервалом определения, также содержащим точку t^*, то в силу единственности мы имели бы $\psi(t^*) = \chi(t^*)$. Таким образом, функция $\tilde{\varphi}(t)$ однозначно определена на всем интервале $m_1 < t < m_2$. В тоже время она является решением уравнения (9.11) с начальными значениями $t_0, \mathbf{x}_0$, так как вблизи каждой точки t^* интервала $m_1 < t < m_2$ функция $\tilde{\varphi}(t)$ совпадает, по построению, с некоторым решением уравнения (9.11).

Пусть $\mathbf{x} = \varphi(t)$ - некоторое решение уравнения (9.11) с начальными значениями $t_0, \mathbf{x}_0$,определенное на интервале $r_1 < t < r_2$. Тогда r_1 - элемент множества R_1, а r_2 - элемент множества R_2, и поэтому $m_1 \leq r_1, r_2 \leq m_2$, т.е. интервал $r_1 < t < r_2$ содержится в интервале $m_1 < t < m_2$. Так как решения $\varphi(t)$ и $\tilde{\varphi}(t)$ имеют одни и те же начальные значения, то, в силу теоремы Коши, они совпадают всюду, где они оба определены, т.е. на интервале $r_1 < t < r_2$, а это и значит, что решение $\tilde{\varphi}(t)$ является продолжением решения $\varphi(t)$. Построенное решение $\varphi(t)$, очевидно, непродолжаемо. В самом деле, пусть решение $\psi(t)$ является продолжением решения $\tilde{\varphi}(t)$. Тогда $t_0, \mathbf{x}_0$ можно принять за начальные значенния решения $\psi(t)$ и, в силу доказанного выше, решение $\tilde{\varphi}(t)$ есть продолжением решения $\psi(t)$, а это значит, что решения $\tilde{\varphi}(t)$ и $\psi(t)$ полностью совпадают. Из таких же соображений следует, что $\tilde{\varphi}(t)$ есть единственное непродолжаемое решение с начальными значениями $t_0, \mathbf{x}_0$.

Допустим теперь, что непродолжаемое решение $\tilde{\varphi}(t)$ совпадает с некоторыми другими решениями $\varphi(t)$ хотя бы при одном значении t. Обозначим это значение t через t_0 и положим $\tilde{\varphi}(t) = \mathbf{x}_0$. Тогда $t_0, \mathbf{x}_0$ являются начальными значениями для непродолжаемого решения $\tilde{\varphi}(t)$ и для решения $\varphi(t)$. В силу доказанного выше, решение $\tilde{\varphi}(t)$ есть продолжение решения $\varphi(t)$. Если решение $\varphi(t)$ непродолжаемо, то, в силу тех же соображений, оно является продолжением решения $\tilde{\varphi}(t)$, и поэтому решения $\varphi(t)$ и $\tilde{\varphi}(t)$ полностью совпадают.

Рассмотрим далее теоремы о непрерывной зависимости решений нормальной системы от начальных данных и параметров и о дифференцируемости решений по начальным данным.

Рассмотрим нормальную систему:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \tag{9.11}$$

где векторная функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ определена в некоторой области

$$\Gamma \subset R^{n+1}_{(t,\mathbf{x})}$$

- n+1 - мерное пространство переменных $t, \mathbf{x}$, и удовлетворяет условиям Коши. Возьмем любую точку $(\xi, \eta) \in \Gamma$ и поставим начальные условия:

$$\mathbf{x} = \eta \text{ при } t = \xi \qquad (9.36).$$

По теореме Коши существует интервал $(\alpha, \beta) \in \xi$, на котором существует единственное решение $\varphi(t)$ системы (9.11), удовлетворяющее условию (9.36). Видим, что каждой выбранной точке (ξ, η) отвечает свое решение, значит любое решение системы (9.11) есть функция не только $\mathbf{x}$, но и функция начальных условий, т.е. решение - функция $\ll n + 2 \gg$ скалярных величин (t, ξ, η). Условимся решения системы обозначать:

$$\varphi(t, \xi, \eta) \tag{9.37}$$

$$\varphi(\xi, \xi, \eta) \tag{9.38}$$

Возникает вопрос об области существования решения $\varphi(t, \xi, \eta)$ и характере его зависимости от ξ, η.

Теорема 1. Пусть векторная фунцкия $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ непрерывна в Γ и во всякой замкнутой ограниченной области $\mathbf{\Gamma}^* \subset \Gamma$ удолетворяет условию Липшица.

2. На некотором интервале (α, β) существует решение системы (9.11) $\psi(t)$.

Тогда существует $\gamma > 0$, такое что для любой точки $(\xi, \eta) \in \mathbf{D}$ $(\alpha \le \xi \le \beta, ||\eta - \psi(t)|| \le \gamma)$ решение (9.37) системы (9.11) так же существует на $[\alpha, \beta]$ и это решение непрерывно относительно ξ и $\eta \in \mathbf{\Gamma}$, равномерно непрерывно по t, любого $t \in [\alpha, \beta]$. Последнее означает, что для $\forall > 0 \exists \delta_{>} 0$, такое что для $\forall (\xi_1, \eta_1) \in \mathbf{\Gamma}$ таких, что $|\xi - \xi_1| < \delta, ||\eta - \eta_1|| < \delta$ выполнено неравенство $||\varphi(t, \xi, \eta) - \varphi(t, \xi_1, \eta_1)|| < \varepsilon$ для $\forall t \in [\alpha, \beta]$

Доказательство этой теоремы будет показено позже. Сформулируем теорему Пикара для системы , содержащей параметр. Пусть мы имеем нормальную систему, правая часть которой кроме t и $\mathbf{x}$ зависит от k параметров $\mu_1, ..., \mu_k$. Введем обозначения

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(здесь $\mu_{n+1} = \mu_n$) и тогда имеет вид

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mu) \tag{9.39}$$

Будем считать, что векторная функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mu)$ определена в Γ_μ: $\Gamma_\mu((t, \mathbf{x}) \in \Gamma, ||\mu - \mu_0| < m)$, где Γ-область в $R^{(n+1)}_{(t,\mathbf{x})}$, а μ_0- фиксированный вектор. Пусть векторная функция $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mu)$ непрерывна в Γ_μ и пусть во всякой замкнутой ограниченной области $\mathbf{\Gamma}_\mu(t, \mathbf{x}) \in \mathbf{\Gamma}^*, ||\mu - \mu_0|| \le a)$ $\quad (\mathbf{\Gamma}^* \subset \Gamma)$ удовлетворяет условию Липшица относительно $\mathbf{x}$, тогда все любые точки $(\xi, \eta, \mu) \in \Gamma_\mu$ интервала $[\alpha, \beta] \ni \xi$, на котором существует единственное решение системы (9.11), удовлетворяющее условию $\mathbf{x} = \eta t = \xi$. Доказательство ее вытекает непосредственно из теоремы Коши, т.к. для этой теоремы выполнены условия теоремы Коши при каждом фиксированном μ. Итак, всякое решение системы (9.39) является функцией не только по t, но и (ξ, η, μ), обозначим его

$$\varphi(t, \xi, \eta, \mu) \tag{9.40}$$

Прежде чем доказывать теорему о непрерывной зависимости решений нормальной системы от начальных данных и параметров, докажем 2 вспомогательные леммы.

Лемма Гронуолла Пусть интегрируемые кусочно-непрерывные функции $\varphi(t) \geq 0\xi(t) \geq 0$ удовлетворяют для t>0 неравенству $\xi(t) \leq \xi_0 + \int\limits_0^t \varphi(s)\xi(s)ds$, где

$$\xi_0 > 0 \qquad (9.42)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\xi(t) \leq \xi_0^{\int\limits_0^t \varphi(s)ds} \qquad (9.43)$$

Доказательство леммы.

Умножим неравенство (9.42) на $\varphi(t)$ и запишем его: $\psi(t) \leq \varphi(t)$ $(\xi_0 + \psi(t))$ где $\psi(t) \equiv \int\limits_0^t \varphi(s)\xi(s)ds$. Или разделив обе части неравенства на $\xi_0 + \psi(t) > 0$ в виде

$$\frac{\frac{\psi(t)}{dt}}{\xi_0 + \psi(t)} \leq \varphi(t).$$

Проинтегрируем последнее неравенство от 0 до t:

$$\xi_0 + \psi(t) \leq \xi_0^{\int\limits_0^t \varphi(s)ds}$$

Подставив сюда выражение для $\psi(t)$ и используя условия (9.42) будем иметь (9.43)

Лемма (основное неравенство) Пусть для векторной функции $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mu)$ выполняет условия теоремы 3 в области Γ_μ и пусть $\Gamma_\mu^* \subset \Gamma_\mu$ есть фиксированная область, упомянутая в теореме. Пусть далее на интервале $[\alpha, \beta] \ni \xi_1(\xi_2)$ существуют два решения системы (9.39):

$$\varphi_i(t) \equiv \varphi(t, \xi_i, \eta_i, \mu_i) \qquad (i = 1, 2) \qquad (9.44)$$

и для этих решений выполняются условия

$$(t, \varphi_i(t), \mu_i) \in \mathbf{\Gamma}_\mu^*, \qquad i = 1, 2, \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

тогда имеем следующее неравенство

$$||\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|| \leq (||\eta_1 - \eta_2|| + M(\xi_1 - \xi_2) + \int\limits_\alpha^\beta ||\mathbf{f}(\tau, \varphi_1(\tau), \mu_1) - \mathbf{f}(\tau, \varphi_1(\tau, \mu_2)||d\tau)e^{L(\beta-\alpha)}$$

где M и L - некоторые положительные постоянные, завися только от выбора $\mathbf{\Gamma}_\mu^*$.

Доказательство:

Из условий теоремы Коши следует, что $\exists$ такие постоянные M>0 и L>0, что имеют место следующие неравенства:

$$||\mathbf{f}(t,\mathbf{x},\mu)|| \le M, \text{когда} \qquad (t,\mathbf{x},\mu)\in\mathbf{\Gamma}^*_\mu; \tag{9.45}$$

$$||\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_1,\mu)-\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_2,\mu)|| \le L||\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2||, \tag{9.46}$$

когда $(t,\mathbf{x}_1,\mu)$ и $(t,\mathbf{x}_2,\mu)\in\mathbf{\Gamma}^*_\mu$.

(9.45) - следствие непрерывности векторной функции $\mathbf{f}$ в $\mathbf{\Gamma}^*_\mu$, а (9.46) - условие Липшица. Так как по предположению решение (9.44)- решение системы (9.39), то они решения соответствующих интегральных уравнений:

$$\varphi_i(t)=\eta_i+\int\limits_{\xi_i}^{t}\mathbf{f}(\tau,\varphi_i(\tau),\mu_i)d\tau, \quad \text{где} \quad \tau\in[\alpha,\beta]$$

Вычитая из одного из этих равенств почленно второе и оценивая по норме найденную разность с учетом (9.45) и (9.46), имеем:

$$||\varphi_1(\tau)-\varphi_2(\tau)|| \le ||\eta_1-\eta_2||+||\int\limits_{\xi_1}^{t}\mathbf{f}(\tau,\varphi_1(\tau),\mu_1)d\tau-\int\limits_{\xi_2}^{t}\mathbf{f}(\tau,\varphi_2(\tau),\mu_2)d\tau|| \le$$

$$||\eta_1-\eta_2||+||(\int\limits_{\xi_1}^{t}\mathbf{f}(\tau,\varphi_1(\tau),\mu_1)d\tau-\int\limits_{\xi_2}^{t}\mathbf{f}(\tau,\varphi_1(\tau),\mu_1)d\tau)+(\int\limits_{\xi_2}^{t}\mathbf{f}(\tau,\varphi_1(\tau),\mu_1)d\tau-$$

$$\int\limits_{\xi_2}^{t}\mathbf{f}(\tau,\varphi_2(\tau),\mu_2)d\tau)|| \le ||\eta_1-\eta_2||+\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}||\mathbf{f}(\tau,\varphi_1(\tau),\mu_1)||d\tau+$$

$$||\int\limits_{\xi_2}^{t}|\mathbf{f}(\tau,\varphi_1(\tau),\mu_1)d\tau-\mathbf{f}(\tau,\varphi_2(\tau),\mu_2)\pm\mathbf{f}(\tau,\varphi_1(\tau),\mu_1)|| \le ||\eta_1-\eta_2||+M|\xi_1-\xi_2|+$$

$$||\int\limits_{\xi_2}^{t}|\mathbf{f}(\tau,\varphi_1(\tau),\mu_1)d\tau)-\mathbf{f}(\tau,\varphi_1(\tau),\mu_2)|d\tau||+||\int\limits_{\xi_2}^{t}|\mathbf{f}(\tau,\varphi_1(\tau),\mu_2)d\tau)-$$

$$\mathbf{f}(\tau,\varphi_2(\tau),\mu_2)|d\tau|| \le ||\eta_1-\eta_2||+M|\xi_1-\xi_2|+L\int\limits_{\alpha}^{\beta}||\varphi_1(\tau)-\varphi_2(\tau)||d\tau+$$

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} ||\mathbf{f}(\tau, \varphi_1(\tau), \mu_1) - \mathbf{f}(\tau, \varphi_1(\tau), \mu_2)||d\tau.$$

Далее применим лемму Гронуолла, считая в роли $\xi_1 \implies ||\varphi_1(t) - \varphi_2(t)||$, $\xi_0 = ||\eta_1 - \eta_2|| + M|\xi_1 - \xi_2| + \int\limits_{\alpha}^{\beta} ||\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)||d\tau + \int\limits_{\alpha}^{\beta} ||\mathbf{f}(\tau, \varphi_1(\tau), \mu_1) - \mathbf{f}(\tau, \varphi_1(\tau), \mu_2)||d\tau$,
$\varphi(t) = L$ тогда получим:

$$||\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|| \le [||\eta_1 - \eta_2|| + M|\xi_1 - \xi_2| + \int\limits_{\alpha}^{\beta} ||\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)||d\tau + \int\limits_{\alpha}^{\beta} ||\mathbf{f}(\tau, \varphi_1(\tau), \mu_1) - \mathbf{f}(\tau, \varphi_1(\tau), \mu_2)||d\tau] * e^{L(\beta - \alpha)}$$

В доказательстве $\xi_1, \xi_2 \in [\alpha, \beta]$, $|t - \xi_2| \le \beta - \alpha$.

Теорема о непрерывной зависимости решений нормальной системы от начал

Рассмотрим систему

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mu),$$

где векторная функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mu)$ определена в области Γ_μ

$$\Gamma_\mu = (t, \mathbf{x}) \in \Gamma, \quad ||\mu - \mu_0|| < m$$

Всякое решение системы (9.39) будем обозначать:

$$\varphi(t, \xi, \eta, \mu), \quad \varphi(\xi, \xi, \eta, \mu) = \eta. \tag{9.47}$$

Доказательство.

1. Пусть векторная фунцкия $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mu)$ в областиΓ_μ удолетворяет условию теоремы Коши.

2. При $\mu = \mu_0$ система (9.39) имеет некоторое решение $\psi(t)$ на $[\alpha, \beta]$. Тогда существует $\gamma > 0$ такое, что для $\forall$ точек $(\xi, \eta, \mu) \in \mathbf{D}_\mu$ $[(\xi, \eta) \in \mathbf{D}, \quad \alpha \le \xi \le \beta, ||\eta - \psi(t)|| \le \gamma, \quad ||\mu - \mu_0 \le \gamma]$ решение $\varphi(t, \xi, \eta, \mu)$ также существует на $[\alpha, \beta]$ и это решение непрерывно относительно ξ, η, μ в области $\mathbf{D}_\mu$, равномерно по t для $\forall t \in [\alpha, \beta]$.

Построим область $\boldsymbol{\Gamma}^*_\mu[(t, \mathbf{x}) \in \boldsymbol{\Gamma}^*[\alpha \le t \le \beta, \quad ||\mathbf{x} - \psi(t)|| \le \triangle] \quad ||\mu - \mu_0|| \le \triangle]$ и выберем $\triangle > 0$, так чтобы $\boldsymbol{\Gamma}^*_\mu \subset \Gamma_\mu$. Выберем число $\gamma > 0$ так, чтобы:

а) $\gamma < \frac{\triangle}{2} e^{-L(\beta-\alpha)}$ (9.48)

б) для $\forall \mu ||\mu - \mu_0|| \leq \gamma$ выполнялось неравенство

$||\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mu) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mu_0)|| \leq \frac{\triangle}{2(\beta-\alpha)} e^{-L(\beta-\alpha)}$ (9.49)

для $\forall (t, \mathbf{x}) \in \mathbf{\Gamma}_*$.

γ можно найти, так как векторная функция $\mathbf{f}$ непрерывна в $\mathbf{\Gamma}^*_\mu$, следовательно равномерно непрерывна. Покажем, что так выбранное число γ определяет область $\mathbf{D}_\mu$, указанную в теореме. Действительно, возьмем любую точку $(\xi, \eta, \mu) \in \mathbf{D}_\mu$ и рассмотрим решение (9.47) системы (9.39), отвечающее этой точке (μ- фиксированная). Это решение может быть продолжено по крайней мере до тех пор, пока граница его не пересечет границу $\mathbf{\Gamma}^*$. Отсюда следует, что $\exists [\alpha_1, \beta_1] \subset [\alpha, \beta]$ и $[\alpha_1 \beta_1] \in \xi$, это имеет следующее:

точка $t, \varphi(t, \xi, \eta, \mu) \in \Gamma^*$, когда $t \in [\alpha_1, \beta_1]$

и точки $(\alpha_1, \varphi(\alpha_1), \xi, \eta, \mu)$ и $(\beta_1, \varphi(\beta_1), \xi, \eta, \mu) \in \mathbf{\Gamma}^* - \Gamma^*$ (9.50)

Покажем, что $[\alpha_1, \beta_1]$ совпадает с $[\alpha, \beta]$. Предположим противное: пусть $[\alpha_1, \beta_1]$ не совпадает с $[\alpha, \beta]$, т.е. $\beta_1 < \beta$. Тогда из определения области $\mathbf{\Gamma}^*$ и условия (9.50) следует, что:

$$||\varphi(\beta_1, \xi, \eta, \mu) - \psi(\beta_1)|| = \triangle \tag{9.51}$$

С другой стороны решение (9.47) и решение $\mathbf{\Psi}(t)$ системы (9.39)имеют общий промежуток $[\alpha_1, \beta_1]$ и границы их на этом промежутке не выходят из области $\mathbf{\Gamma}^*_\mu$, а тогда к этим решениям на промежутке $[\alpha_1, \beta_1]$ применим основное неравенство (лемма2), положив $\varphi_2(t) = \varphi(t, \xi, \eta, \mu)$, $\varphi_1(t) = \psi(t)$, тогда $\xi_2 = \xi$, $\eta_2 = \eta$, $\mu_2 = \mu$, $\mu_1 = \mu_0$, $\xi_1 = \xi$, $\eta_1 = \psi(\xi)$. Будем иметь:

$$||\psi(t) - \varphi(t, \xi, \eta, \mu)|| \leq$$

$$[||\psi(\xi) - \eta|| + M * 0 + \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} ||\mathbf{f}(\tau, \psi(\tau), \mu_0) - \mathbf{f}(\tau, \psi(\tau), \mu)|| d\tau] e^{L(\beta_1 - \alpha_1)}.$$

Принимая во внимание определение области $\mathbf{D}$ и неравенств (9.49), будем иметь:

$$||\eta - \psi(\xi)|| \leq \gamma < \frac{\triangle}{2} e^{-L(\beta_1 - \alpha_1)}$$

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} ||\mathbf{f}(\tau, \psi(\tau), \mu_0) - \mathbf{f}(\tau, \psi(\tau), \mu)|| d\tau \leq \frac{\triangle}{2} e^{-L(\beta_1 - \alpha_1)} \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\beta - \alpha} < \frac{\triangle}{2} e^{-L(\beta - \alpha)}.$$

Отсюда:

$$||\varphi(t,\xi,\eta,\mu)-\psi(t)|| < (\frac{\triangle}{2}+\frac{\triangle}{2})e^{-L(\beta-\alpha)}e^{L(\beta_1-\alpha_1)} < \triangle,$$

для $\forall t \in [\alpha_1,\beta_1]$. А именно для $t=\beta_1$, что противоречит равенству (9.51) Аналогично доказывается для $\alpha_1=\alpha$. Теперь докажем неравенство. Возьмем две точки $(\xi_i,\eta_i,\mu_i) \in \mathbf{D}_\mu \quad (i=1,2)$ и рассмотрим соответствующие решения $\varphi_i(t)=\varphi_i(t,\xi_i,\eta_i,\mu_i) \quad (i=1,2)$. По доказанному они определены для $\forall t \in [\alpha,\beta]$ и $\quad (t,\varphi_1(t)) \in \mathbf{\Gamma}^*, \quad t\in[\alpha,\beta]$. А тогда эти решения удовлетворяют всем условиям леммы 2 и к ним применим основное неравенство

$$||\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|| \le [||\eta_1-\eta_2||+M|\xi_1-\xi_2|+$$

$$\int\limits_\alpha^\beta ||\mathbf{f}(\tau,\varphi_1(\tau),\mu_1)-\mathbf{f}(\tau,\varphi_1(\tau),\mu_2)||d\tau]e^{L(\beta-\alpha)}, \quad \forall t\in[\alpha,\beta].$$

Из этого неравенства вытекает, что если $(\xi_2,\eta_2,\mu_2) \to (\xi_1,\eta_1,\mu_1)$, то $\varphi_2(t) \to \varphi_2(t)$ равномерно при всех $t \in [\alpha,\beta]$, а это и есть непрерывность в $\mathbf{D}_\mu$.

Теорема о дифференцируемости решений нормальной системы по началь

Прежде чем формулировать эту теорему, докажем вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть мы имеем векторную функцию $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$, определена и непрерывна в замкнутой области $\mathbf{G}^*$ - выпуклой и имеет $\frac{\partial \mathbf{f}(t,\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ в области $\mathbf{\Gamma}^*$, тогда имеет место неравенство: $\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_2)-\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_1)=[\frac{\partial \mathbf{f}(t,\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}}+G](\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)$, где G - квадратная матрица стремящаяся к 0, когда $\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1 \to 0 \quad$ равномерно для $\forall (t,\mathbf{x}_1)\in\mathbf{\Gamma}^*$.

Доказательство.

Напомним, что :

$$\frac{\partial \mathbf{f}(t,\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}(t,\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}(t,\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_n} \\ \frac{\partial \mathbf{f}(t,\mathbf{x}_2)}{\partial \mathbf{x}_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}(t,\mathbf{x}_2)}{\partial \mathbf{x}_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{f}(t,\mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{x}_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}(t,\mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{x}_n} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим векторную функцию $\mathbf{\Phi}(s)=\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_1+s(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)), \quad (t,\mathbf{x}_1)$ и $(t,\mathbf{x}_2)\in\mathbf{\Gamma}^*$. Найдем $\mathbf{\Phi}(s)=\frac{\partial \mathbf{f}(t,\mathbf{x}_1+s(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1))}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)$ Рассмотрим теперь

$\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_2)-\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_1)=\mathbf{\Phi}(1)-\mathbf{\Phi}(0)=\int\limits_0^1\mathbf{\Phi}(s)ds=\int\limits_0^1\frac{\partial\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_1+s(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1))}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)ds=$ по теореме о среднем $\frac{\partial\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_1+\theta(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1))}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)=(\frac{\partial\mathbf{f}(t,\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}+\Gamma)(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)$, где $\Gamma=\frac{\partial\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_1+\theta(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1))}{\partial\mathbf{x}}-\frac{\partial\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_1)}{\partial\mathbf{x}}$.

$\frac{\partial\mathbf{f}}{\mathbf{x}}$ равномерно непрерывна и $\Gamma\to 0$ при $\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\to 0$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t}=\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \tag{9.52}$$

Будем предполагать, что векторная функция $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ определена и непрерывна и имеет непрерывную производную $\frac{\partial\mathbf{f}(t,\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}$ в области Γ - n+1 мерного пространства переменных $t,\mathbf{x}$. Тогда, как было показано ранее, $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ будет удовлетворять условию Липшица во всякой замкнутой ограниченной области $\mathbf{\Gamma}^*\subset\Gamma$, точки $(t,\mathbf{x}_1)$ и $(t,\mathbf{x}_2)$ лежат внутри области $\mathbf{\Gamma}^*$. Пусть система (9.52) имеет некоторое решение $\psi(t)$ на некотором замкнутом промежутке $[\alpha,\beta]$. Рассмотрим область $\mathbf{\Gamma}^*:\quad\alpha<t\leq\beta,\quad||\mathbf{x}-\psi(t)||\leq\triangle,\quad\triangle>0,\quad\mathbf{\Gamma}^*\subset\Gamma$. По предыдущей теореме если взять $\gamma>0,\quad 0<\gamma<\frac{\triangle}{2}e^(-L(\beta-\alpha))$, где L- постоянная Липшица, тогда по доказанному решение $\varphi(t)=\varphi(t,\xi,\eta)$ системы (9.52) будет определено для $\forall t\in[\alpha,\beta],\quad(\xi,\eta)\in\mathbf{D}\quad(\alpha\leq\xi\leq\beta,\quad||\eta-\psi(\xi)||\leq\gamma)$, и оно будет непрерывно по (ξ,η), равномерно непрерывно по $t\in[\alpha,\beta]$. Было показано, что точка $(t,\varphi(t),\xi,\eta)\in\mathbf{\Gamma}^*,\quad t\in[\alpha,\beta]$. Имеет место:

Теорема

При сделанных выше предположениях решение $\varphi(t,\xi,\eta)$ системы (9.52) в каждой точке $(\xi,\eta)\in D$ имеет частную производную $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}$ $(\forall t\in[\alpha,\beta])$, при этом эти производные будут непрерывны по $\xi,\in D$, равномерно непрерывны по t из $[\alpha,\beta]$ и будут являться решениями линейной системы:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}=\frac{\partial\mathbf{f}(t,\varphi(t),\xi,\eta)}{\partial\mathbf{x}} \tag{9.53}$$

И соответственно при начальных условиях:

$$\mathbf{u}=-\mathbf{f}(\xi,\eta),\quad\text{при } t=\xi\quad\text{для}\quad\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} \tag{9.54}$$

$$u=E\quad\text{при}\quad t=\xi\quad\text{для}\quad\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \tag{9.55}$$

Из непрерывности частной производной $\frac{\partial\mathbf{f}(t,\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}$ в Γ следует ограниченность производной в $\mathbf{\Gamma}^*$. Тогда $\exists L>0$ такое, что :

$$||\frac{\partial\mathbf{f}(t,\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}||\leq L\quad\text{когда}\quad(t,\mathbf{x})\in\mathbf{\Gamma}^*.$$

Доказательство теоремы проведем для производной

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1}, ..., \frac{\partial\varphi}{\partial\eta_n}\right), \qquad \text{где} \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

Будем рассматривать систему (9.53) при условии (9.56). Условие (9.56) эквивалентно условиям :

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{e}_i \quad \text{при} \quad t = \xi \quad (i = 1, ..., n) \quad \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad - i - \text{ая строка}$$

матрица коэффициентов системы (9.53) определена и непрерывна по (t, ξ, η) на множестве:

$$t \in [\alpha, \beta], \quad (\xi, \eta_1) \in D \tag{9.56}$$

Рассмотрим n решений системы (9.53), удовлетворяющих условиям (9.55):

$$\mathbf{u}_i = \chi_i(t) = \chi_i(t, \xi, \mathbf{e}_i, \xi, \eta) \qquad (i = 1, ..., n) \tag{9.57}$$

$$\chi_i(\xi) = e_i \qquad (i = 1, ..., n).$$

Было доказано, что всякое решение системы (9.53), а именно и решения (9.57) будут определены на множестве (9.56) и будут непрерывны по ξ, η в области D, равномерно $t \in [\alpha, \beta]$.

Теперь для доказательства нашей теоремы осталось доказать, что $\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_i}$ существует на (9.56) и что имеет место

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_i} = \chi_i(t) \qquad (i = 1, ..., n) \tag{9.58}$$

Возьмем любую точку $(\xi, \eta) \in D = (\xi, \eta : \alpha < \xi < \beta, \quad ||\eta - \psi(\xi)|| < \gamma)$ и рассмотрим решение $\varphi(t) = \varphi(t, \xi, \eta)$ системы (9.52), отвечающее этой точке. Дадим η приращение $h\mathbf{e}_i$ (где h-тело) (i=1,...,n), так что $(\xi, \eta + h\mathbf{e}_i) \in D$. Рассмотрим решение системы (9.52) $\varphi_i(t) = \varphi(t, \xi, \eta + h\mathbf{e}_i), \quad t \in [\alpha, \beta]$. Для решений $\varphi(t)$ и $\varphi_i(t)$ имеем:

$$\varphi(t) = \eta + \int\limits_{\xi}^{t} \mathbf{f}(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

$$\varphi_i(t) = \eta + h\mathbf{e}_i + \int\limits_{\xi}^{t} \mathbf{f}(\tau, \varphi_i(\tau))d\tau \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

Построим $\ll$ заготовку $\gg$ для производных $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_i}$:

$$\frac{\varphi_i(t) - \varphi(t)}{h} = e_i + \int\limits_{\xi}^{t} (\mathbf{f}(\tau, \varphi_i(\tau)) - \mathbf{f}(\tau, \varphi(\tau)))\frac{1}{h}d\tau \tag{9.58}$$

Согласно леммы 3 имеем:

$$\frac{\mathbf{f}(\tau, \varphi_i(\tau)) - \mathbf{f}(\tau, \varphi(\tau))}{h} = \frac{\partial \mathbf{f}(\tau, \varphi(\tau))}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\varphi_i(\tau) - \varphi(\tau)}{h} + \theta(\tau, \mathbf{h}) \right), \tag{9.59}$$

$$\text{где } \theta(\tau, \mathbf{h}) = \Gamma, \quad \frac{\varphi_i(\tau) - \varphi(\tau)}{h}, \quad \Gamma \to 0 \text{ при } \varphi_i(\tau) - \varphi(\tau) \to 0, h \to 0. \tag{9.60}$$

Установим свойство векторной функции $\theta(\tau, \mathbf{h})$. Применим к решениям $\varphi(t), \varphi_i(t)$ основное неравенство, тогда $||\varphi_i(t) - \varphi(t)|| \leq he^{L(\beta - \alpha)}$

Из последнего неравенства при $h \to 0$ получим $||\varphi_i(t) - \varphi(t)|| \to 0$ равномерно при всех $t \in [\alpha, \beta]$. Кроме того, $\frac{||\varphi_i(t) - \varphi(t)||}{|h|} \leq e^{L(\beta - \alpha)}$, $t \in [\alpha, \beta], \quad h \neq 0$ Отсюда и из (9.60) видим, что

$$||\theta(\tau, \mathbf{h})|| \to 0 \text{ (равномерно) при } h \to 0 \quad \tau \in [\alpha, \beta]. \tag{9.61}$$

Подставим (9.59) и (9.60) в (9.58), будем иметь:

$$\frac{\varphi_i(\tau) - \varphi(\tau)}{h} = \mathbf{e}_i + \int\limits_{\xi}^{t} \frac{\partial \mathbf{f}(t, \varphi(\tau))}{\partial \mathbf{x}} \frac{\varphi_i(\tau) - \varphi(\tau)}{h} + \int\limits_{\xi}^{t} \theta(\tau, h)d\tau \tag{9.62}$$

Рассмотрим решение (9.57) системы (9.53), отвечающее выбранной точке (ξ, η) и по номеру i. Оно будет решением соответствующей интегральной системы

$$\chi_i(t) = \mathbf{e}_i + \int\limits_{\xi}^{t} \frac{\partial \mathbf{f}(\tau, \varphi(\tau))}{\partial \mathbf{x}} \chi_i(\tau)d(\tau) \tag{9.63}$$

Обозначим через $\mathbf{V}_i(t) = \frac{\varphi_i(t) - \varphi(t)}{h} - \chi_i(t)$. Вычтем из (9.62) выражение (9.63), получим:

$$\mathbf{V}_i(t) = \int\limits_{\xi}^{t} \frac{\partial \mathbf{f}(\tau, \varphi(\tau))}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{V}_i(\tau)d\tau + \int\limits_{\xi}^{t} \theta(\tau, \mathbf{h})d\tau$$

Отсюда:

$$||\mathbf{V}_i(t)|| \leq \int\limits_{\alpha}^{\beta} ||\theta(\tau,\mathbf{h})||d\tau + h\int\limits_{\xi}^{t} ||\frac{\partial \mathbf{f}(\tau,\varphi(\tau))}{\partial \mathbf{x}}|| * ||\mathbf{V}_i(\tau)||d\tau$$

или

$$||\mathbf{V}_i(t)|| \leq \int\limits_{\alpha}^{\beta} ||\theta(\tau,\mathbf{h})||d\tau + Lh\int\limits_{\xi}^{t} ||\mathbf{V}_i(\tau)||d\tau$$

к полученному неравенству применим лемму Гронуолла, считая в роли $\varphi(t) = ||V_i(t)||, \quad \xi(t) = L_n, \quad \xi_0 = \int\limits_{\alpha}^{\beta} ||\theta(\tau,\mathbf{h})||d\tau,$ получим:

$$||\mathbf{V}_i(t)|| \leq \int\limits_{\alpha}^{\beta} ||\theta(\tau,\mathbf{h})||d\tau * e^{L(t-\xi)}, \quad \forall t \in [\alpha,\beta].$$

Откуда при $h \to 0$ с учетом (9.61) имеем $||\mathbf{V}_i(t)|| \to 0, \quad h \to 0, \quad \forall t \in [\alpha,\beta]$. Отсюда видим, что $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_i(t)-\varphi(t)}{h} = \chi_i(t)$, а по определению предела:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_i(t)-\varphi(t)}{h} = \frac{\partial\varphi(t,\xi,\eta)}{\partial\eta_i}, \qquad \text{ч.т.д.}$$

Глава 5. Элементы теории устойчивости

2.1. Будем рассматривать системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i^*}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots x_n) \qquad (1.1)$$

Где $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ предположим непрерывными ($i,j = 1,\ 2,\dots,\ n$). Будем интерпретировать $x_1, x_2, \dots x_n$ как координаты движущейся точки, а t, $(t_0 \leq t < \infty)$ как время.

Каждое частное решение системы (1.1) будем называть движением. Рассмотрим движение определенное начальными данными:

$$t = t_0, \qquad x_i = x_i^0, \qquad (1.2)$$

т.е.

$$x_i = x_i(t, t_0, {x_1}^0, {x_2}^0, \dots {x_n}^0) \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

Определение: Движение (1.2) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что как только $|{x_i}^0 - \tilde{x_i}^0| < \delta$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то

$$|x_i(t, t_0, {x_1}^0, {x_2}^0, \ldots {x_n}^0) - x_i(t, t_0, \tilde{x_1}^0, \tilde{x_2}^0, \ldots \tilde{x_n}^0)| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \tag{1.3}$$

Для всех значений $t_0 \leq t < \infty$

Всякое движение, не являющееся устойчивым, называется неустойчивым; это означает, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$,что какие бы малые $\delta > 0$ ни было выбранно, всегда найдутся значения $(\tilde{x_1}^0, \tilde{x_2}^0, \ldots \tilde{x_n}^0)$ и t=T, что для некоторого i и этого T , будет выполнятся неравенство:

$$|x_i = x_i(T, t_0, {x_1}^0, {x_2}^0, \ldots {x_n}^0) - x_i = x_i(T, t_0, \tilde{x_1}^0, \tilde{x_2}^0, \ldots \tilde{x_n}^0)| \geq \varepsilon_0$$

не смотряна то, что $|{x_k}^0 - \tilde{x_k}^0| < \delta$ k=1, 2,. . . , n

Исследуемое движение, соответствующее начальным условиям $t_0, {x_1}^0, \ldots {x_n}^0$, Ляпунов называет невозмущенным, а движение с измененными начальными условиями: $t_0, \tilde{x_1}^0, \ldots \tilde{x_n}^0$ - возмущенным движением. Таким образом, устойчивость невозмущенного движения геометрически означает, что в любой начальный момент времени t точки траектории возможного движения находятся в достаточно малой окрестности соответствующей точки возможного движения.

Перейдем теперь к координатам $t_0, \bar{x_1}, \bar{x_2}, \ldots \bar{x_n}$ по формулам:

$$x_i = \bar{x}_i + x_i(t) \qquad (1.4)(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Где для краткости мы положили $x_i(t) = x_i(t, t_0, {x_1}^0, \ldots {x_n}^0)$, тогда возмущенное движение перейдет в невозмущенное движение в новых координатах $\bar{x}_i(t) \equiv 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) т.е. в так называемую точку покоя. Действительно произведем замены переменных (1.4) в уравнениях (1.1). Имеем:

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} + \frac{d}{dt}(x_i(t)) = f_0(t, \bar{x_1} + x_1(t), \ldots \bar{x_n} + x_n(t))$$

Разлогая правые части в ряд Тейлора по $\bar{x}_i$ вплоть до членов нулевого порядка, получим:

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} + \frac{d}{dt}(x_i(t)) = f_0(t, x_1(t), \ldots x_n(t)) + \sum_{m=1}^{n}(\bar{x_m}\frac{\partial f_i}{\partial x_m}(t, x_1(t) + Q_i\bar{x_1}, \ldots, x_n(t) + Q_i\bar{x_n}))$$

Так как $x_i(t)$ есть решение системы (1.1), то мы получаем:

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} = \sum_{m=1}^{n}(\bar{x_m}\frac{\partial f_i}{\partial x_m}(t, x_1(t) + Q_i\bar{x}_1, \ldots, x_n(t) + Q_i\bar{x_n})) \qquad (1.5)$$

Ранее было доказано(См. теорему 6 параграфа 9 предыдущей главы), что коэффициенты при $\bar{x_m}$ в правой части равенства (1.5) являются непрерывными функциями.

Этой системе с начальными условиями $\bar{x}_i = 0$ $(i = 1,\ 2,\ldots,\ n)$ удовлетворяет решение $\bar{x}_i \equiv 0$, $(i = 1,\ 2,\ldots,\ n)$ это и доказывает наше утверждение.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что преобразования уже совершились, и будем рассматривать устойчивость по Ляпунову тривиального решения: $x_i(t) \equiv 0$

Условия (1.3), определяющие устойчивость означает теперь, что траектория возможного движения не выходит при $t_0 \leq t < \infty$ из ε - окрестности точки покоя.

В дальнейшем нас будут интересовать качественные критерии устойчивости по Ляпунову: и теоретически, и для практического применений возможны лишь те случаи когда мы, не умея интегрировать систему (1.1), тем не менее, делать заключения об устойчивости невозмущенного движения.

2. Предположим, что функция f_i допускают непрерывные производные первого порядка по x_i и что эти производные являются постоянными вдоль тривиального решения, т.е.:

$$\frac{\partial f_i(t, 0, 0 \ldots 0)}{\partial x_j} = a_{ij} = const \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

В сделанных предположениях функции f_i могут быть представлены в виде

$$f_i(t, x_1, x_2 \ldots x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \varphi_i(t, x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (1.6) i = 1, 2, \ldots, n$$

Где φ_i бесконечно малые порядка выше первого в окрестности точки $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Система (1.1) имеет вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}x_j) + \varphi_i(t, x_1, x_2, \ldots x_n) i = 1, 2, \ldots, n \qquad (1.7)$$

Если в системе (1.7) отбросить члены порядка выше первого, то полученная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}x_j) i = 1, 2 \ldots, n \qquad (1.8)$$

называется системой первого приближения для нелинейной системы (1.6).

Можно рассматривать уравнения (1.8) и как систему уравнений в вариациях в окрестности ее тривиального решения. До Ляпунова при исследовании вопроса об устойчивости ограничивались в основном изучением устойчивости в первом приближении, считая полученный результат разрешающим вопрос об устойчивости и основной линейной системы(1.1).

2.2

теорема 1 об устойчивости по первому приближению Рассмотрим случай, когда все корни характеристического уравнения первого приближения, т.е. системы (1.8), простые, или по крайней мере все элементарные делители матрицы коэффициентов системы (1.8) простые. Тогда существует неособое линейное преобразование:

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}x_k) i = 1, 2, \ldots, n \qquad (1.9)$$

приводящая систему (1.8) к диагональной форме. Применяя теперь это преобразование к случаю (1.7), тогда эта система принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1 + \varphi_1^*(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2 + \varphi_2^*(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = \lambda_n y_n + \varphi_n^*(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \qquad (1.10)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, - корни характеристического уравнения системы (1.8), а $\phi_0^*(t, y_1, y_2, \ldots y_n)$ определяется равенством:

$$\phi_i^*(t, y_1, y_2, \ldots y_n) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{in}\phi_k(t, x_{1,2}, \ldots x_n)) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (1.11)$$

Теорема 1. Если

1) все корни характеристического уравнения первого приближения (1.8) отрицательны;

2) все функции $\phi_i(t, x_1, x_2, \dots x_n)(1.7)$:$|\phi_i(t, x_1, x_2, \dots x_n)| \leq M[\sum i = 1^n (x_i^2)]^{1/2+\alpha}(), I$, $\alpha > 0$

3)Все корни характеристического уравнения первого приближения (1.8) простые или по крайней мере элементарные делители матрицы коэффициентов системы уравнений (1.8) простые, то тривиальное решение системы уравнений (1.7) устойчиво.

Доказательство.

Условие 3) теоремы позволяет при помощи необходимого линейного преобразования (1.9) привести систему (1.7) к виду (1.10). Покажем предварительно, что функции $\phi_i^*(t, y_1, y_2, \dots y_n)$ из системы (1.10) удовлетворяют условию (А). В самом деле пусть α - верхняя грань модулей коэффициентов преобразования (1.9), т.е.

$$|\alpha_i k| < \alpha \qquad i = 1, 2 \dots, n$$

Тогда пользуясь равенством (1.11) получим:

$$|\phi_i^*(t, y_1, y_2, \dots y_n)| = |\sum_{k=1}^{n}(\alpha_{ik}\phi_k(t, x_1, x_2, \dots x_n))| \leq M\alpha \sum_{k=1}^{n}(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)^{1/2+\alpha} \leq M_1(x_1^2+$$

где M_1 = M α n.

Но при всяком не особом преобразовании сумма квадратов старых переменных не превосходит суммы квадратов новых переменных, умноженных на некоторую постоянную. В самом деле разрешим равенства (1.9) относительно переменных x_i:

$$x_i = \sum_{k=1}^{n}(\beta_{ik}y_k) \qquad (1.13),$$

и пусть β - верхняя грань $|\beta_{ik}|$, т.е. $|\beta_i k| \leq \beta$ ($i = 1, 2, \dots, n$),

$$x_i^2 = (\sum_{k=1}^{n}(\beta_{ik}y_k))^2 \leq \{\sum_{k=1}^{n}(|\beta_{ik}||y_k|)^2 \leq \beta^2 \sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}(|y_k||y_j|)) \leq \frac{\beta^2}{2}\sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}(y_k^2+y_j^2)) = n\beta^2 \sum_{k=1}^{n}$$

Здесь воспользовавшись известным неравенством:

$$|y_k||y_j| \leq \frac{y_k^2 + y_j^2}{2}$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2) \leq L\sum_{k=1}^{n}(y_k^2) \qquad (1.14)$$

где $L = n^2\beta^2$Отметим, что

$$\sum_{k=1}^{n}(y_k^2) \leq L_1\sum_{k=1}^{n}(x_k^2) \qquad (1.15)$$

где $L_1 = n^2\alpha^2$ Из неравенств (1.12) и (1.14) получим требуемое неравенство:

$$|\phi_i^*(t, y_1, y_2, \dots y_n)| \leq M^*[\sum_{i=1}^{n}(x_i^2)]^{1/2+\alpha} \qquad (1.16)$$

где $M^* = M_1L^{1/2+\alpha}$ Теперь умножим первое уравнение системы (1.10) на y_1, второе - на y_2, и т.д. Сложим их, тогда получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}(y_i^2) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_1 y_i^2) + \sum_{i=1}^{n}(y_i\phi_i^*(t, y_1, y_2, \dots y_n)) \qquad (1.17)$$

По условию, все числа λ_i отрицательны; обозначим наибольшее из них через $-\omega$ и пусть

$$\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_1 = -\omega \qquad \omega > 0 \qquad (1.18)$$

Теперь оценим сверху выражение стоящее справа в равенстве (1.17). В силу неравенств (1.16) и (1.18) получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}(y_i^2) \leq -\omega\sum_{i=1}^{n}(y_i^2) + M^*\sum_{i=1}^{n}(|y_i|(\sum_{k=1}^{n}(y_k^2))^{1/2+\alpha}$$

Или так как $|y_i| \leq (\sum_{k=1}^{n}(y_k^2))^{1/2+\alpha}$, то

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}(y_i^2) \leq -\omega\sum_{i=1}^{n}(y_i^2) + nM^*(\sum_{k=1}^{n}(y_k^2))^{1+\alpha}$$

Или

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}(y_i^2) \leq (-\omega\sum_{i=1}^{n}(y_i^2))(1 - \frac{nM*}{\omega}(\sum_{i=1}^{n}(y_i^2))^{\alpha}) \qquad (1.19)$$

Будем считать, что y_k настолько малы, что

$$\sum_{k=1}^{n}(y_k^2) < \{\frac{1}{2}\frac{\omega}{nM^*}\}^{1/2}$$

Такое предположение допустимо, потому что в начальный момент $t = t_0$ величины y_k можно предполагать как угодно малыми, в частности удовлетворяющими неравенству (1.20), а в силу непрерывной зависимости решений нашей системы от начальных условий, неравенство (1.20) будет иметь место в некоторой окрестности значений $t = t_0$.

Тогда неравенство (1.19) перепишется так:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}(y_i^2(t)) \leq -\frac{\omega}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i^2(t))$$

Откуда разделяя переменные и интегрируя от t_0 до t получим:

$$\ln\sum_{i=1}^{n}(y_i^2(t)) \leq -\omega(t-t_0)$$

Или

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i^2(t)) \leq e^{-\omega(t-t_0)}\sum_{k=1}^{n}(y_k^2(t_0)) \qquad (1.21) \tag{1}$$

Из неравенств (1.21) видно, что $\sum_{k=1}^{n}(y_k^2(t))$ монотонно убывает и стремиться к нулю, при $t \to \infty$. Поэтому если неравенство (1.20) выполнимо в начальный момент t_0, то это неравенство будет выполнимо при всех значениях $t \geq t_0$.Следовательно и неравенство (1.21) справедливо при всех $t > t_0$, если только при $t = t_0$ неравенство (1.20) имело место. Из неравенств (1.14) и (1.18) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k^2(t)) \leq LL_1 e^{-\omega(t-t_0)}\sum_{k=1}^{n}(x_k^2(t_0)) \tag{2}$$

Поэтому если $|x_k(t_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{LL_1 n}}$, то $|x_k(t)| < \varepsilon$а это и означает, что тривиальное решение системы (1.7) устойчиво. Отметим также, что как видно, из неравенств (1.22), все $x_k(t)$ стремятся к 0, при $t \to \infty$. Таким образом теорема доказана. Далее можно рассмотреть случай, когда среди элементарных делителей матрицы коэффициентов системы (1.8) будут встречаться кратные. Имеет место теорема:

Теорема 2. Если

> 1) все корни характеристического уравнения первого приближения (1.8) отрицательны 2) все функции $\phi_i(t, x_1, \ldots x_n)$ в системе (1.7) удовлетворяют условию (A), то тривиальное решение системы (1.7) устойчиво.

Теорема 3. Если

1) все корни характеристического уравнения первого приближения (1.8) имеют отрицательную действительную часть 2) все функции $\phi_i(t, x_1, \dots x_n)$ в системе (1.7) удовлетворяют условию (A), то тривиальное решение системы (1.7) устойчиво.

Теорема 4. Если 1) хотя бы один корень характеристического уравнения первого приближения (1.8) имеет положительную вещественную часть, 2) все функции $\phi_i(t, x_1, \dots x_n)$ в системе (1.7) удовлетворяют условию (A), то тривиальное решение системы (1.7) неустойчиво.

Применим критерий Гурвиза к многочленам второй, третьей и четвертой степени.

а) $f(z) = z^2 + a_1 z + a_2$ Условие Гурвиза сводится к $a_1, a_2, \dots a_n$. Эти неравенства в пространстве коэффициентов a_1 и a_2 первую четверть.

б) $f(z) z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$ Условие Гурвиза сводится к неравенствам $a_1 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0, a_3 > 0$. Область определенная этими неравенствами в пространстве коэффициентов имеет вид.

в) $f(z) = z^4 a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z a_4$ Условие Гурвиза сводится к таким неравенствам

$a_1 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0, (a_1 a_2 - a_3) a_3 - a_1^2 a_4 > 0, a_4 > 0$. Как видим, для рассматриваемых многочленов условия Гурвиза очень удобны и легко проверяются однако с возрастанием степени они очень усложняются и удобно применить другие признаки отрицательности действительных частей

многочлена.
Признак отрицательности действительных частей всех корней многочлена.
Критерий Родел-Гурвиза: необходимым и достаточным условием отрицательности действительных частей всех корней многочлена

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots a_{n-1} z + a_n$$

с действительными коэффициентами является положительность всех главных диагональных миноров матрицы Гурвиза.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = b_{in}$$

Матрица Гурвиза строится следующим образом: по главной диагонали матрицы стоят коэффициенты рассматриваемого многочлена в порядке нумерации начиная с a_1 до a_n, столбцы состоят поочередно из коэффициентов только с нечетными или только с четными индексами, включая и коэффициент $a_0 = 1$. Следовательно элементы матрицы $b_{ik} = a_{2i-k}$. Все недостающие коэффициенты, т.е. коэффициенты с индексами большими и как меньшими нуля заменяются на 0. Обозначим главные диагональные миноры матрицы Гурвиза:

$$\Delta_1 = |a_1|, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 \ldots & 0 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & a_n \end{vmatrix}$$

Заметим, что т.к. $\Delta_n = \Delta_{n-1} a_n$, то последнее из условий Гурвиза $\Delta_1 > 0 \ldots \Delta_n > 0$ может быть заменено требованием $a_n > 0$.
Рассмотрим следующий Пример 1: При каких значениях параметра a тривиальное решение $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ системы

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} & = & x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} & = & -3x_1 \\ \frac{dx_3}{dt} & = & ax_1 + 2x_1 + x_3 \end{cases}$$

ассиметрически устойчиво(т.е. устойчиво и при $t \to \infty$ стремиться к 0). Постороим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -k & -k & 1 \\ -3 & -k & 0 \\ \alpha & 2 & -1-k \end{vmatrix} = 0$$

или $k^3 + k^2 - \alpha k + 6$
По признаку Гурвиза условиями ассиметричности будут $a_1 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0, a_3 > 0$. Эти условия в данном случае сводятся к условиям $-\alpha - 6 > 0$.
Параграф 2. Простейшие типы точек покоя. Без ограничения общности можно считать(См параграф 1), что исследовать на устойчивость систему это все равно что исследовать на устойчивость тривиальные решения, или что одно и тоже, расположение в начале координат точки покоя $x_i \equiv 0$ системы уравнений ================,
если для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что из неравенства $\sum_{i=1}^{n}(x_i^2(t_0)) < \delta_\varepsilon$
следует $\sum_{i=1}^{n}(x_i^2(t)) < \varepsilon^2$ при $t \geq T$ т.е траектория, начальная точка каждая находиться в δ_ε -окрестности начала координат при $t \geq t_0$, не выходит за пределы ε окрестности начала координат. Исследуем расположение траекторий в окрестности точки покоя $x = 0, y = 0$ системы двух линейно однородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} & = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

где $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ Ищем решение в виде $x = \alpha_1 e^{kt}, y = \alpha_2 e^{kt}$
Для определения n получаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{vmatrix} = 0$$

α_1 α_2 с точностью до постоянного множителя определяется из одного из уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 & = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-k)\alpha_2 & = 0 \end{cases}$$

Рассмотри следующие случаи: А) Корни характеристического уравнения k_1 и k_2 действительны и различны. Общее решение имеет вид

$$\begin{cases} x &= c_1\alpha_1 e^{k_1 t} + c_2\beta_1 e^{k_2 t} \\ y &= c_1\alpha_2 e^{k_1 t} + c_2\beta_2 e^{k_2 t} \end{cases}$$

где α_1 α_2 β_1 β_2 - постоянные, определяемые из уравнения (2.2) соответственно при $k = k_1$, $k = k_2$, а c_1 и c_2 - произвольныепостоянные. 1) Если $k_1 < 0$, $k_2 < 0$ то точки покоя $x = 0$ $y = 0$ ассиметрично устойчивы, т.к. из наличия множителей $e^{k_1 t}, e^{k_2 t}$ в (2.3) все точки, находящиеся в начальный момент $t = t_0$ в
любой δ -окрестности начала координат, при достаточно большом t переходит в точки, лежащие в сколь угодно малой ε- окрестности начала координат, а при $t \to \infty$ стремятся к началу координат

получаем устойчивый узел. Стрелки – направления движения по траекториям при возрастании t. 2) Пусть $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Этот случай переходит в предыдущий, при замене t на $-t$. Следовательно, траектории имеют такой же вид как и предыдущем случае, но только точки по траектории движутся в противоположном направлении.

Очевидно с возрастанием t точки сколь угодно ближе к началу координат, удаляются из ε-окрестности начала координат. Точки покоя рассматриваемого типа называются неустойчивыми. 3) Если $k_1 > 0$, $k_2 < 0$, то точка покоя тоже неустойчива, т.к. движутся по траектории

$$x = c_1\alpha_1 e^{k_1 t}, \qquad y = c_1\alpha_2 e^{k_1 t}$$

точка при сколь угодно малых значениях c_1 с возрастанием t выходит из ε- окрестности начала координат.

Заметим, что в рассматриваемом случае судествует движение приближающееся к началу координат, а именно:

$$x = c_1\beta_1 e^{k_2 t}, \qquad y = c_1\beta_2 e^{k_2 t}$$

При различных значениях c_2 получаем различные движения по одной и той же прямой $y = \frac{\beta_2}{\beta_1}x$ При возрастании t точки на этой прямой движутся по направлению к началу координат.

Заметим также, что точки траектории движутся с возрастанием t по прямой $y = \frac{a_2}{a_1}x$, удаляясь от начала координат. Если же $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$, то при $t \to \infty$, так и при $t \to -\infty$ траектория покидает окрестность точки покоя. Точки покоя рассматриваемого типа называются узлом. Б) Корни характеристического уравнения комплексны:

$$k_{1,2} = p \pm qi, \qquad q \neq 0$$

Общее решение рассматриваемой системы можно представить в виде:

$$\begin{aligned} x = &\ e^{pt}(c_1 \cos qt + c_2 \sin qt) \\ y = &\ e^{pt}(c_1^* \cos qt + c_2^* \sin qt) \end{aligned}$$

где c_1 и c_2 - произвольные постоянные, а c_1^* и c_2^* - некоторые линейные комбинации этих постоянных. При этом возможны следующие случаи: 1)$k_{1,2} = p \pm qi, \qquad p < 0, q \neq 0$
Множитель e^{pt} стремиться к нулю с возрастанием t,
а второй периодический множитель уравнения (2.4) остается ограниченным. Если бы $p = 0$ то траектории были бы, в силу периодичности второго множителя в правой части (2.4) – замкнутые кривые окружающие точку покоя $x = 0$, $y = 0$. Наличие же стремящегося к нулю с возрастанием t множителя $e^{pt}(p < 0)$ превращает замкнутые кривые в спирали, асимптотически приближающиеся при $t \to \infty$ к началу координат, причем при достаточно большом t точки находящиеся при $t = t_0$ в любой δ-окрестности начала

координат попадают в заданную ε-окрестность точки покоя. Следовательно точка покоя асимптотически устойчива и называется устойчивым фокусом. Фокус отличается от угла тем, что касательные к траекториям не стремятся к определенному пределу при приближении точки касания к точки покоя. 2) $k_{1,2} = -p \pm qi, \qquad p > 0, q \neq 0$ Этот случай переходит в предидущийпри замене t на $-t$. Следовательно, траектории не отличаются от предыдущего случа, но движение по ним происходит при возрастании t в противоположном направлении. Из-за наличия возрастающего множителя e^{pt} точки находятся в начальный момент сколь угодно близко к началу координат с возрастанием t, удаляются из ε-окрестности начала координат. Точка покоя неустойчива и носит название неустойчивого фокуса.

3) $k_{1,2} = \pm qi, \qquad , p \neq 0, q \neq 0$. В силу периодичности решения траекториями являются замкнутые кривые, содержащие внутри себя точку покоя. Точку покоя называют центром. Центр является устойчивой точкой покоя, т.к. для любого заданного $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$, такое, что замкнутые траектории, замкнутые точки которых лежат в δ- окрестности начала координат, или, что тоже самое, можно подобрать сколь угодно малые c_1 и c_2 что решения

$$\begin{cases} x = & c_1 \cos qt + c_2 \sin qt \\ y = & c_1^* \cos qt + c_2^* \sin qt \end{cases}$$

будут удовлетворять неравенству

$$x^2(t) + y^2(t) < \varepsilon^2$$

Заметим однако, что асимптотической устойчивости нет, т.к. $x(t)$ и $y(t)$ не стремятся к 0 при $t \to \infty$. В) Корни кратные $k_1 = k_2$ 1) $k_1 = k_2 = k < 0$
Общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) = & \ e^{kt}(c_1\alpha_1 + c_2\beta_1 t) \\ y(t) = & \ e^{kt}(c_1\alpha_2 + c_2\beta_2 t) \end{aligned}$$

Придем не исключена возможность того, что $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то тогда a_1 и a_2 будут произвольные постоянные. Из-за наличия быстро стремящегося к нулю множителя e^{kt} при $t \to \infty$ произведение $e^{kt}(c_1\alpha_1 + c_2\beta_1 t)$ стремиться к 0 при $t \to \infty$, причем при достаточно большом t все точки любой δ- окрестности начала координат попадают в заданную ε-окрестность начала координат, и следовательно,
точка покоя асимптотически устойчива. Это устойчивый узел.

Этот узел занимает промежуточное положение между узлом а) 1) и фокусом б) 1), т.к. при сколь угодно малом изменении действительных коэффициентов $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ он может превратиться как в устойчивый фокус, так и в устойчивый узел, потому, что при сколь угодно малом изменении действительных корней коэффициентов $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ - кратный корень может перейти как в пару комплексных корней, так и в пару действительных различных корней. Если $\beta - 1 = \beta_2 = 0$ то также получаем устойчивый узел (так называемый дикритический узел).

2) Если $k_1 = k_2 > 0$ то замена t на $-t$ приводит к предыдущему случаю, следовательно траектории не отличаются от траекторий предыдущего случая. В этом случае точка покоя называется неустойчивым узлом.

Тем самым исчерпаны все возможные случаи, т.к. $k_1 = 0$ или $k_2 = 0$ исключает условия $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Рассмотрим теперь случай, когда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

тогда характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0$
Имеем нулевой корень $k_1 = 0$. Предположим, что при этом $k_2 \neq 0$ Тогда общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} x = & \quad c_1\alpha_1 + c_2\beta_1 e^{k_2 t} \\ y = & \quad c_1\alpha_2 + c_2\beta_2 e^{k_2 t} \end{aligned}$$

Исключая t получим семейство параллельных прямых $\beta_1(y - c_1\alpha_2) = \beta_2(x - c_2\alpha_1)$. Тут $c_2 = 0$ получаем однохарактерное семейство точек покоя, расположенных на прямой $\alpha_1 y = \alpha_2 x$. Если $k_2 < 0$, то при $t \to \infty$ на каждой траектории точки приближаются к лежащей на этой траектории точке покоя $x = c_1\alpha_1, y = c_1\alpha_2$. Точка покоя $x \equiv 0, y \equiv 0$ устойчива, но асимптотической устойчивости нет.

Если же $k_2 > 0$, то траектории расположены также, но движение точек на траектории происходит в противоположном направлении. Точка покоя $x \equiv 0, y \equiv 0$ неустойчива.
Если же $k_1 = k_2 = 0$, то возможны два случая: 1) Общее решение системы (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned} x = & \quad c_1 \\ y = & \quad c_2 \end{aligned}$$

Все точки являются точками покоя, все решения устойчивы.

2) Общее решение имеет вид:

$$\begin{aligned} x = & \quad c_1 + c_2 t \\ y = & \quad c_1^* + c_2 {*} t \end{aligned}$$

где c_1^* и c_2^* - линейная комбинация произвольных постоянных c_1 и c_2. Точка покоя $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ неустойчива.
Замечание. Классификация точек покоя тесно связанна с классификацией особых точек. Действительно, в рассматриваемом случае

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} & = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

где $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Путем исключения t система (2.6) может быть сведена к уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y} \tag{3}$$

Интегральные кривые которой совпадают с траекторией движения системы (2.1) являются особой точкой уравнения (2.7). Заметим, что если оба корня характеристического уравнения имеют отрицательную действительную часть $[a, b, b]$, то точка покоя асимптотически устойчива. Если же хотя бы один корень имеет положительную действительную часть – случаи а) 3), б) 2), в) 2), то точка покоя неустойчива. Пример. Рассмотрим уравнение колебаний маятника

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + b\sin x = 0$$

Обозначим $\frac{dx}{dt} = y$, тогда $\frac{dy}{dt} = -b\sin x - ay$.
Особые точки этой системы имеют координаты
$x = k\pi$, (k - любое целое)
$y = 0$ Используя разложение

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Запишем систему первого приближения

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = y \\ \frac{dy}{dt} & = -bx - ay \end{cases}$$

Характеристическое уравнение которой имеет вид

$$k^2 + ak + b = 0$$

Если $a > 0$, $b > 0$ то корни имеют отрицательную вещественную часть и нулевое положение равновесия будет устойчиво по первому приближению. Исследуем теперь на устойчивость точку $(\pi, 0)$ Используем разложение

$$\sin x = -(x - \pi) + \frac{(x-\pi)^3}{3!} - \cdots$$

Запишем систему первого приближения

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = y \\ \frac{dy}{dt} & = b(x - \pi) - ay \end{cases}$$

Перенося начало координат в точку $x = \pi$, $y = 0$ получим

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = y \\ \frac{dy}{dt} & = bx - ay \end{cases}$$

Характеристическое уравнение имеет в данном случае вид

$$k^2 + ak - b = 0$$

При $a > 0$, $b > 0$ корни этого уравнения будут веественны различных знаков. Следовательно точка $(\pi, 0)$ является неустойчивой.

Глава 5. Уравнения в частных производных 1 порядка.

Определение. Дифференциальными уравнениями в частных производных называются дифференциальные уравнения, в которых неизвестные функции являются функциями более чем одной переменной.

Например. Колебания струны описываются уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Пусть искомая функция z зависит от нескольких независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 2)$. Общий вид уравнения с частными производными 1 порядка имеет вид:

$$F(z, x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}) = 0$$

или в случае двух независимых переменных

$$F(z, x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) = 0$$

Задачу решения уравнения с частными производными можно поставить таким образом: найти все решения данного уравнения. Их будет бесконечное множество.

<u>Пример.</u> $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x} - xy^2$; рассмотрим y как параметр, тогда для z имеем линейное уравнение: его общее решение есть $z = Cx - x^2y^2$. Общее решение уравнения в частных производных есть $z = x\Psi(y) - x^2y^2$ ($\Psi - \forall$ функция).

Для уравнения 1 порядка, предполагая его решенным относительно одной из частных производных, например

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = f(x_1, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n})$$

> Задачу Коши формулируют так: найти решение уравнения $z = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которое при данном начальном значении x_1 обращается в заданную функцию остальных независимых переменных, при $x_1 = x_1^0$, $z = \varphi(x_2, \ldots, x_n)$.

В случае двух независимых переменных задача Коши допускает простую геометрическую интерпретацию. Решение $z = \varphi(x, y)$ изображает поверхность, которую называют интегральной.

§1 Линейное однородное уравнение в частных производных 1 порядка.

Рассмотрим уравнение вида:

$$X_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=0 \qquad (1.1)$$

где $X_1,\ldots,X_n$ - данные функции независимых переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$ (непрерывны и непрерывно дифференцируемы, в ноль одновременно не обращаются).
Уравнение (1.1) назовём линейным однородным уравнением в частных производных 1 порядка.
Решение (1.1) связано с решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений 1 порядка, записанной в симметрическом виде, соответствующей уравнению (1.1).

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n} \qquad (1.2)$$

Решение (1.2) ищется в виде нахождения n независимых первых интегралов методом интегрирующих комбинаций.
Имеет место <u>теорема 1</u>.

Всякое решение уравнения (1.1) приравнивается произвольн
даёт первый интеграл системы.
Левая часть любого первого интеграла системы (1.2) есть р
уравнения (1.1)
Первым интегралом системы (1.2) называется соотношение
$\neq$ тождественной постоянной, и равное $\equiv$ если вместо y_i п
какое-либо частное решение (1.2)

Док-во:

Пусть $\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$ - первый интеграл системы (1.2).
Покажем, что это есть решение уравнения (1.1). Т.к. это тождество вдоль любой интегральной кривой, дифференцирование даёт:

$$d\Psi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} dx_i \equiv 0$$

dx_i заменим из (1.2) величинами им пропорциональными

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} X_i \equiv 0$$

это тождество выполняется вдоль любой интегральной кривой в области изменения переменных x_i, не зависит от произвольной постоянной, т.к. через каждую точку проходит интегральная кривая.
Значит Ψ решение дифференциального уравнения $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} X_i \equiv 0$, т.е. уравнения (1.1)

$$z = \Psi(x_1, \ldots, x_n)$$

т.е. $\forall$ первый интеграл системы есть решение уравнения (1.1).
Доказательство второй части проходит наоборот (снизу вверх).
Теорема 2. Если

$$\begin{cases} \Psi_1(x_1, \ldots, x_n) = C_1 \\ \Psi_2(x_1, \ldots, x_n) = C_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = C_{n-1} \end{cases}$$

есть независимые первые интегралы системы (1.2), то $z = \Phi(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1})$ (1.3) - общее решение (1.1), где $\Phi(\Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1})$ - произвольная функция.

Док-во:

1. Покажем, что (1.3) вообще решение.

2. Любое частное решение $z = \Psi(x_1, \ldots, x_n)$ содержится в формуле (1.3) при конкретном выборе Φ.

1. Это решение - т.к. произвольная функция первых интегралов по предыдущей теореме есть тоже решение (1.1).

2. Пусть $z = \Psi(x_1, \ldots, x_n) - \forall$ частное решение (1.1) - покажем, что оно содержится в формуле (1.3).

Т.к. Ψ - частное решение, то оно тождественно удовлетворяет уравнению (1.1).

$$(4)\quad \begin{cases} X_1\frac{\partial\Psi}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial\Psi}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial\Psi}{\partial x_n} \equiv 0 \qquad (1.1) \\ \text{и т.к. } (n-1) \text{ первые интегралы, то} \\ X_1\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_n} \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_1\frac{\partial\Psi_{n-1}}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial\Psi_{n-1}}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial\Psi_{n-1}}{\partial x_n} \equiv 0 \end{cases}$$

Хотя бы одно $X_i \neq 0$. (4) - система относительно X_i имеет отличное от нуля решение, тогда определитель $\equiv 0$.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\Psi}{\partial x_1} & \frac{\partial\Psi}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\Psi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\Psi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial\Psi_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\Psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad (1.4)$$

По теореме об Якобианах, тогда между функциями существует зависимость:

$$F(\Psi, \Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n) = 0$$

Т.к. $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$ независимы, то $D(\frac{\Psi_1, \ldots, \Psi_n}{x_1, \ldots, x_n}) \neq 0-$ он является минором для (1.4).
По теореме об Якобианах $\Psi = \Phi(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}) = z$, т.е. $\forall$ частное решение задается этой формулой.
Что и требовалось доказать.

<u>Пример.</u> $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$
$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = C \quad z = \Phi(\frac{x}{y})$ - произвольная функция.

Задача Коши для линейных однородных уравнений в частных производных 1 порядка.

Найти $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ такую, что при $x_n = x_n^0$ функция $z = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ в наперед заданную.
<u>Геометрическая интерпретация.</u>
$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) = 0$
$z = f(x, y)$ в трёхмерном пространстве - это семейство интегральных поверхностей, $y = y_0$ $z = \varphi(x)$ - линия.
Значит из семейства интегральных поверхностей нужно выделить одну, проходящую через линию (заданную).
<u>Решение задачи Коши.</u>
Решаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} \qquad (1.2)$$

Находим решения:

$$\begin{cases} \Psi_1(x_1, \dots, x_n) = C_1 \\ \Psi_2(x_1, \dots, x_n) = C_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = C_{n-1} \end{cases} \tag{1.5}$$

Затем в систему (1.5) подставим $x_n = x_n^0$.

$$\begin{cases} \Psi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = \overline{\Psi}_1 \\ \Psi_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = \overline{\Psi}_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = \overline{\Psi}_{n-1} \end{cases} \tag{1.6}$$

Эти интегралы не зависимы, т.е.

$$\frac{D(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})} \neq 0$$

Т.е. (1.6) можно разрешить относительно $x_1, \dots, x_n$.

$$\begin{cases} X_1 = \omega_1(\overline{\Psi}_1, \overline{\Psi}_2, \dots, \overline{\Psi}_{n-1}) \\ X_2 = \omega_2(\overline{\Psi}_1, \overline{\Psi}_2, \dots, \overline{\Psi}_{n-1}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\Psi}_1, \overline{\Psi}_2, \dots, \overline{\Psi}_{n-1}) \end{cases}$$

$z = \varphi[\overbrace{\omega_1(\overline{\Psi}_1, \overline{\Psi}_2, \dots, \overline{\Psi}_{n-1})}^{X_1}, \overbrace{\omega_2(\overline{\Psi}_1, \overline{\Psi}_2, \dots, \overline{\Psi}_{n-1})}^{X_2}, \dots, \overbrace{\omega_{n-1}(\overline{\Psi}_1, \overline{\Psi}}^{X_n}$
это есть искомое решение.
При $x_n = x_n^0$, получим
$z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$

Пример. №1. $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$
Найти поверхность такую, что $y = 0, z = x$.

$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}$ $\quad \Psi_1 = x^2 + y^2 = C_1$ общее $z = \Phi(x^2+y^2)$.
$x^2 = \overline{\Psi}_1 \Rightarrow x = \sqrt{\overline{\Psi}_1} \qquad z = \sqrt{\Psi_1} = \sqrt{x^2+y^2}$

№2. $\sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{z}\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ при $x = 1, u = y - z$
$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dz}{\sqrt{z}}$

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = \Psi_1 \\ \sqrt{x} - \sqrt{z} = \Psi_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{y} = \overline{\Psi}_1 \\ 1 - \sqrt{z} = \overline{\Psi}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} (1 - \overline{\Psi}_1)^2 = y \\ (1 - \overline{\Psi}_2)^2 = z \end{cases}$$

$u = (1-\Psi_2)^2 - (1-\Psi_1)^2 = \Psi_1^2 - 2\Psi_1 + 2\Psi_2 - \Psi_2^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 - 2(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + 2(\sqrt{x} - \sqrt{z}) - (\sqrt{x} - \sqrt{z})^2 = -2\sqrt{xy} + y - z + 2\sqrt{y} - 2\sqrt{z} + 2\sqrt{xz} = y - z - 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{y} - 2\sqrt{z}$
$x = 1, \; u = y - z$

§2 Неоднородное линейное уравнение в частных производных 1 порядка.

Это уравнение линейное относительно произодных.
Общий вид: $P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_1} + P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots +$

$$+P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_n} = R(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) \qquad (2.1)$$

где P_i - непрерывны и непрерывно дифференцируемы, а z искомая функция от x_i.
Решение (2.1) будем искать в виде неявной функции

$$V(x_1, \ldots, x_n, z) = 0 \qquad (2.2)$$

если (2.2) подставим в (2.1), то получим тождество.
Решение (2.1) сводится к решению линейного неоднородного уравнения в частных производных. Продифференцируем (2.2) по $x_1, \ldots, x_n$, учитывая, что z зависит от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Должна выполняться теорема о существовании неявной функ-

ции:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0 & \frac{\partial z}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x_1}}{\frac{\partial v}{\partial z}} \\ \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0 & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \frac{\partial v}{\partial x_n} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0 & \frac{\partial z}{\partial x_n} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x_n}}{\frac{\partial v}{\partial z}} \end{cases}$$

Подставим $\frac{\partial z}{\partial x_n}$ и приведём к общему знаменателю.

$$P_1\frac{\partial v}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial v}{\partial x_2} + \ldots + P_n\frac{\partial v}{\partial x_n} + R\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \tag{2.3}$$

получим линейное однородное уравнение в частных производных.

Решая (2.3), найдём v, приравняв её к нулю, найдём в неявном виде решение (1). Решаем (2.3).

$$\frac{dX_1}{P_1} = \frac{dX_2}{P_2} = \cdots = \frac{dX_n}{P_n} = \frac{dz}{R} \tag{2.4}$$

должны найти n независимых интегралов системы (2.4).

$$\begin{cases} \varphi_0(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C_0 \\ \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C_1 \\ \ldots \\ \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C_{n-1} \end{cases} \tag{2.5}$$

общим решением (2.4) является: (2.6) $V = \Phi(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$. Это общее решение (2.3).

Теперь, чтобы получить общее решение (2.1), приравниваем (2.6) к нулю.

$$\Phi(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) = 0$$

<u>Пример.</u> $\frac{\partial z}{\partial x}(1 + \sqrt{z - x - y}) + \frac{\partial z}{\partial y} = 2$

$\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}$

$z - 2y = C_0$

$-\frac{dz-dx-dy}{\sqrt{z-x-y}} = dy \qquad \begin{cases} z-2y = C_0 \\ 2\sqrt{z-x-y}+y = C_1 \end{cases}$

$\varphi(z-2y, 2\sqrt{z-x-y}+y) = 0$

Задача Коши для неоднородных линейных уравнений.

Найти решение (2.1) такое, которое при

$x_n = x_n^0 \quad z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0)$

Решим сначала задачу Коши для линейного однородного уравнения (2.3):

Найти V так, что при $x_n = x_n^0$

$$V = z - \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

Решив эту задачу и, приравняв её к нулю, решим задачу Коши для уравнения (2.1).

Составляем (4), находим n независимых интегралов, затем подставляем в (2.5) $x_n = x_n^0$; получим

$$(2.7) \qquad \begin{cases} \varphi_0(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0, z) = \overline{\varphi}_0 \\ \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0, z) = \overline{\varphi}_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0, z) = \overline{\varphi}_{n-1} \end{cases}$$

Решим (2.7) с учётом, что интегралы независимы относительно $z, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$

$$\begin{cases} z = \omega_0(\overline{\varphi}_0, \overline{\varphi}_1, \ldots, \overline{\varphi}_{n-1}) \\ x_1 = \omega_1(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \ldots, \overline{\varphi}_{n-1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \ldots, \overline{\varphi}_{n-1}) \end{cases}$$

Составим

$V = \omega_0 - \varphi[\omega_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}), \omega_2(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})]$

$V = \omega_0(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) - \varphi[\omega_1(\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1})]$

Приравняв $V = 0$, решим задачу Коши для уранения (2.1).

Пример. Из предыдущего примера найти z такую, что $y = 0,\ z = 2x$

$\begin{cases} \overline{\varphi}_0 = z \\ \overline{\varphi}_1 = 2\sqrt{z-x} \end{cases}$ $\begin{cases} z = \overline{\varphi}_0 \\ x = \overline{\varphi}_0 - \frac{1}{4}\overline{\varphi}_1^2 \end{cases}$

$z - 2y = 2z - 4y - \frac{1}{2}(y + 2\sqrt{z-x-y})$

$z - 2y - \frac{1}{2}y^2 - 2y\sqrt{z-x-y} - 2(z-x-y) = 0$

§3 Система 2^x уравнений в частных производных с 1 неизвестной функцией.

$\begin{cases} F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) = 0 \\ \Phi(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) = 0 \end{cases}$

Эта система не всегда соместна.

Будем рассматривать системы разрешимые:

$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y, z) \\ \frac{\partial z}{\partial y}) = \varphi(x, y, z) \end{cases}$ (3.1)

Решить эту систему - значит найти функцию z такую, что она удовлетворяет и I и II уравнениям.

Выведем необходимое и достаточное условие $\exists$ решения системы.

Пусть существует решение системы $z = z(x, y)$, причём эта функция имеет непрерывные частные производные первого порядка и непрерывные смешанные второго порядка. Эти условия обеспечивают непрерывность(???) дифференцирования этих уранений 1 - по y, 2 - по x.

$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot f} \qquad (3.2)$$

(3.2) может выполняться тождественно и нетожд. по переменным x, y, z.

(I) (3.2) не тождественно выполняется, то соотношение связывает x, y, z.
Если $\exists\ z$ - решение системы, то этим решением является именно функция z, найденная отсюда.
Практически находим z из (3.2) и проверяем удовлетворяет ли она системе (3.1). Если нет, то её отбрасывают.
Можно найти z как функцию от одной произвольной постоянной, т.е. ??? интегральная поверхность, а нужно найти общее решение.
Найдем решение (3.1) зависящее хотя бы от одной произвольной постоянной, если такая функция существует, то система (3.1) называется вполне интегрируемой.

> Необходимость и достаточность условия того, что решение системы (3.1) зависит от одной произвольной постоянной, является тождественное выполнение соотношения (3.2) по переменным x, y, z.

Необходимость.
Пусть $\exists$ решение (3.1) зависящее от произвольной постоянной, т.е это значит, что $\exists$ семейство интегральных поверхностей, т.е. через каждую точку (x, y, z) проходит поверхность, т.е. (3.2) выполняется тождественно по этим переменным.
Достаточность.
Пусть (3.2) выполнено тождественно. Найдём z зависящее от одной произвольной переменной.
Берём первое уравнение системы и принимаем y за постоянную величину.
$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y, z)$. Допустим решили его $z = \Psi(x, y, C(y))$. Нужно определить $C(y)$ так, чтобы z удовлетворяло второму уравнению системы.

$$\Psi'_y + \Psi'_C \frac{dC}{dy} = \varphi$$

$$\frac{dC}{dy} = \frac{\varphi - \Psi'_y}{\Psi'_C} \tag{3.3}$$

убедимся, что (3.3) - обыкновенный дифференциал.
Покажем, что правая часть (3.3) не зависит от x. Продифференцируем по x и убедимся, что эта производная обращается в 0.
Дифференцируем числитель. $[\varphi'_x + \varphi'_z \cdot f - f'y - f'_z \cdot \Psi'_y]$
$\Psi''_{yx} = \Psi''_{xy} = f'_y + f'_z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y + f'_z \cdot \Psi'(y)$
$z = \Psi$
$\frac{\partial z}{\partial x} = \Psi'_x = f$
$[\varphi'_x + \varphi'_z \cdot f - f'y - f'_z \cdot \Psi'_y]\Psi'_C - (\varphi - \Psi'(y))\Psi''_{cx} = \Psi'_C(\varphi'_x + \varphi'_z \cdot f - f'y - \varphi f(z)) = 0$
Т.к. $\Psi''_{cx} = \Psi''_{xc} = f'_z \cdot \Psi'_C$
$\Psi'(C) \neq 0, \quad \Psi'_C$ – решение однородного уравнения, поэтому ?? = 0.
(3.3) - обыкновенное дифференциальное уравнение 1 порядка; решим его
$C(y) = \omega(y, a)$, где a - произв. интегрирования. Подставим в z и получим $z = \Psi(x, y, \omega(y, a))$.

<u>Пример.</u> 1.) $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = z + yz = f \\ \frac{\partial z}{\partial y} = z^2 + 2xz = \varphi \end{cases}$
$z + (1+y)(z^2 + 2xz) = 2z + (2z + x)(z + y^2)$
$z[-1 - z(1+y)] = 0$
решение $z_1 = 0 \quad z_2 = \frac{1}{z+y}$

2.) $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2y^2} + \frac{2z}{y} - y^2 \end{cases} \qquad 2y \equiv \frac{2}{y} \cdot y^2$
Значит можно найти решение зависящее от одной переменной.
$\begin{cases} z = xy^2 + C(y) \\ 2xy + C'(y) = \frac{1}{2y^2} + \frac{2z}{y} - y^2 \end{cases}$
т.е. $2xy + C'(y) = \frac{1}{2y^2} + 2xy + \frac{2C(y)}{y} - y^2$

$C'(y) - \frac{2C(y)}{y} = \frac{1}{2y^2} - y^2$ - линейное уравнение

$\frac{dC}{C} = \frac{2dy}{y} \quad \ln C = 2\ln y + \ln C_1$

$C(y) = C_1 y^2$

$C_1' y^2 + 2yC_1 - 2C_1 y = \frac{1}{2y^2} - y^2$

$C_1' = \frac{1}{2y^4} - 1 \quad C_1 = -\frac{1}{y^3} - y + a$

$C = y^2(-\frac{1}{y^3} - y + a) \ \to z = xy^2 - \frac{1}{y} - y^3 + y^2 a$

§4 Уравнения Пфаффа.

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0 \tag{4.1}$$

P, Q, R - непрерывные и дифференцируемые функции.

$z = z(x,y)$

Решение этих уравнений связано с решениями системы 2^x уравнений в частных производных с одной неизвестной функцией.

$\begin{cases} dz = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy \quad (4.2) \\ dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{P}{R} = f \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{Q}{R} = \varphi \end{cases}$

Необходимым и достаточным условием того, что решение зависит от произвольной постоянной, является выполнение тождества:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \tag{4.3}$$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{R\frac{\partial P}{\partial y} - P\frac{\partial R}{\partial y}}{R^2} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{R\frac{\partial P}{\partial z} - P\frac{\partial R}{\partial z}}{R^2}$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{R\frac{\partial Q}{\partial x} - Q\frac{\partial R}{\partial x}}{R^2} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{R\frac{\partial Q}{\partial z} - Q\frac{\partial R}{\partial z}}{R^2}$

$-\frac{R\frac{\partial P}{\partial y} - P\frac{\partial R}{\partial y}}{R^2} + \frac{Q}{R} \cdot \frac{R\frac{\partial P}{\partial z} - P\frac{\partial R}{\partial z}}{R^2} = -\frac{R\frac{\partial Q}{\partial x} - Q\frac{\partial R}{\partial x}}{R^2} + \frac{Q}{R} \cdot \frac{R\frac{\partial Q}{\partial z} - Q\frac{\partial R}{\partial z}}{R^2}$

$-R\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial R}{\partial y} + Q\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{QP}{R}\frac{\partial R}{\partial z} = -R\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial R}{\partial x} + P\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{QP}{R}\frac{\partial R}{\partial z}$

$$P(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}) + Q(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}) + R(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) = 0 \tag{4.4}$$

1) Пусть условие (4.4) выполнено тождественно, то существует решение уравнения (4.1) зависящее от одной произвольной постоянной

$$F(x, y, z, C) = 0 \tag{4.5}$$

Покажем, что в этом случае уравнение Пфаффа допускает интегрирующий множитель.

Дифференцируем (4.5):

$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0 \\ Pdx + Qdy + Rdz = 0 \end{cases}$, тогда

$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \frac{\partial F}{\partial y} = Q, \frac{\partial F}{\partial z} = R$, откуда

$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{Q} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{R} = \mu(x, y, z)$

$\mu Pdx + \mu Qdy + \mu Rdz = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = dF = 0$

Пример1. $yzdx + xzdy + xyzdz = 0$

$yz(xz - x) + xz(y - yz) + xyz(z - z) \equiv 0$

$\mu = \frac{1}{xyz}$

$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + dz = 0 \ \rightarrow \ln xy + z = C$

2) Соотношение (4.4) не тождественно.

Значит, невозможно найти z зависящее от 2^x переменных и C.

Тогда ищут z и y как функцию от x.

Поделим (4.1) на dx.

$$P + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{dz}{dx} = 0 \tag{4.5}$$

Значит одну переменную нужно полагать произвольной.

Пусть $y = \Psi(x)$, подставляя его в (4.5) получим (4.5) зависит от dx. Решив (4.5) интегрированием, найдём $z = z(x, C)$.

$\begin{cases} z = z(x, C) \\ y = \Psi(x) \end{cases}$

Геометрическое решение - семейство пространственных кривых.

Список рекомендованной литературы.

В.В. Степанов	Курс дифференциальных уравнений. Изд-во физмат литературы.
Л.С. Понтрягин	Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд-во "Наука", 1965 г.
Н.М. Матвеев	Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд-во "Высшая Школа", 1963 г.
Л.Э. Эльсгольц	Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Изд-во "Наука", 1969 г.
Петровский	Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям.